

I-311

非線形スロッシング解析における境界要素適応分割

新潟大学 正員 阿部和久

1. はじめに

非線形スロッシング問題では自由水面運動の追跡が必要となる。流体粒子を Lagrange 的に記述する場合、節点粒子の局在化が生じ、その結果として解析精度が時間ステップ間で大幅に変動する可能性があり、適切な要素分割の設定が困難である。本研究では、流体の速度ポテンシャル解析に境界要素法を用いて得られた方程式系を対象に、一定自由度下で最適要素配置を与える r-法に基づく適応分割法を併用し、上述の問題点の改善を試みた。

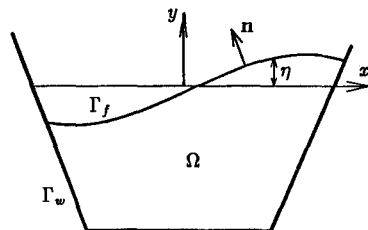


図-1 解析領域の定義

2. 離散化方程式の構成

図-1のような二次元容器内のスロッシング問題を考える。流体を非圧縮、非粘性とし、流れを非回転場とすると、速度ポテンシャル ϕ に対して基礎方程式は次式で与えられる。

$$\text{支配方程式: } \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega), \quad \text{運動学的条件式: } \frac{Dx}{Dt} := u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \frac{Dy}{Dt} := v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{on } \Gamma_f)$$

$$\text{圧力方程式: } \frac{D\phi}{Dt} = \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 - g\eta \quad (\text{on } \Gamma_f), \quad \text{適合条件式: } \frac{\partial \phi}{\partial n} = \bar{q} \quad (\text{on } \Gamma_w) \quad \dots (1)$$

ここで Ω は流体領域、 Γ_f, Γ_w はそれぞれ自由表面と壁面、 D/Dt は物質微分、 u, v は流体粒子速度、 g は重力加速度、 η は静止状態からの水面高さ、 $\bar{q}$ は壁面流束の規定値である。

支配方程式をみたす速度ポテンシャルを直接法に基づく境界要素法で構成し、一次要素で離散化する。さらに、 Γ_f 上の運動学的条件式と圧力方程式に重み付き残差表示を適用し、前者より節点粒子速度と ϕ, q との関係を誘導して後者へ代入し、さらに Newmark 法に準ずる時間積分スキームを適用して離散化式を構成する。以上2種類の方程式系を連立することで、最終的に文献1)に示した方程式を得る。

3. r-法の導入

(1) 境界要素方程式²⁾

各要素 j での線形関数による近似度を示す error indicator λ_j を次式で定義する。

$$\lambda_j = \text{Max}\{\lambda_{ij} \mid i = 1, \dots, N\}, \quad \lambda_{ij} = - \int_{\Gamma_j} q^*(x_i, y)(\phi - \hat{\phi}) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_j} \phi^*(x_i, y)(q - \hat{q}) d\Gamma_y \quad \dots (2)$$

ここで、 ϕ, q は真の解、 $\hat{\phi}, \hat{q}$ はそれを線形関数内挿して得られる関数、 x_i は選点、 Γ_j は境界要素、 N は選点総数である。なお、式(2)の $\phi - \hat{\phi}, q - \hat{q}$ は近似解と、その二次補間より近似的に求める。

各要素における λ_j の総和を最小にする要素分割を最適要素配置とし、境界形状や境界条件によって分割された部分境界 Γ^k 毎に $\text{Minimize } \sum \lambda_j$ を考える。各要素の λ_j が要素長 h_j に対して $\lambda_j \sim h_j^\beta$ ($\beta > 1$)であると仮定すると、次の変換操作を繰り返すことにより最適要素長を得る。

$$h'_j = \frac{L_k}{\sum h_j / \lambda_j^{1/\beta}} \cdot \frac{h_j}{\lambda_j^{1/\beta}} \quad (L_k = \sum h_j) \quad \dots (3)$$

(2) 圧力方程式

Γ_f 上における圧力方程式の残差 r を次式で定義する。

$$r = \frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + g\eta \quad \dots (4)$$

要素 Γ_j における残差 r_j をその両端点で式(4)より求めた残差の平均により評価し、 $r_j \sim h_j^\gamma$ とする。すると式(3)と同様にして、 r の L_2 ノルムを最小化する要素分割が次式で与えられる。

$$h'_j = \frac{L_k}{\sum h_j / \zeta_j^{1/(2\gamma+1)}} \cdot \frac{h_j}{\zeta_j^{1/(2\gamma+1)}} \quad (\zeta_j = r_j^2 h_j) \dots\dots\dots (5)$$

4. 解析例による検討

式(3),(5)で各方程式に対する最適要素分割を得るが、それらは互いに一致しない。そこで、自由水面上の最終的な要素分割は、各々の分割を Mesh 1, Mesh 2 とし、次の重み平均により決定した。

$$Mesh = \alpha Mesh \ 1 + (1 - \alpha) Mesh \ 2 \quad (0 \leq \alpha \leq 1) \dots\dots\dots (6)$$

また、式(3),(5)の β, γ の値は、 λ_j, ζ_j の平均値の収束次数を実際に求め、 $\beta = 2.6, \gamma = 1.75$ と設定した。

解析例として、図-2に示す矩形容器内の自由振動解析を行った。自由水面20分割、側面10分割、底面6分割とし、r-法を50Step毎に実行した場合の2,202,402Stepにおける自由水面節点位置を図-3に示す。r-法未使用では402Stepで要素の局在化が顕著に現れているが、r-法を適用することで大幅に改善されている。また、自由水面の分割数を8から20分割まで変化させ、水面形状誤差の収束性を調べた。結果を図-4に示す。図中のNORMは各節点、各ステップでの値より、Penney & Price³⁾の解析解に基づき、誤差の二乗和の平方のかたちで求めた。いずれの自由度においても、r-法を併用することで精度が改善され、その収束次数もいくらか向上することがわかる。

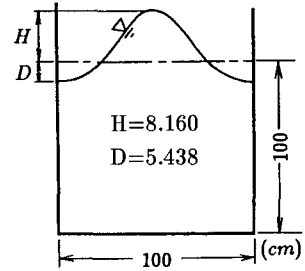


図-2 解析条件

5. おわりに

r-法により境界要素方程式と圧力方程式に対する最適分割を与える手法について検討し、その有効性を確認した。しかし、r-法の適用ステップや α の値などの設定において不明な点もあり、今後の課題としたい。

参考文献

- 1) Abe, K. and Kamio, T.: BEM-15, Vol.1, 81-91, 1993.
- 2) 阿部：r-法による最適要素分割，境界要素法論文集第9巻，1992.
- 3) Penney, W.G. and Price, A.T.: Trans.R.Soc.Lond.A., Vol.244, 254-284, 1952.

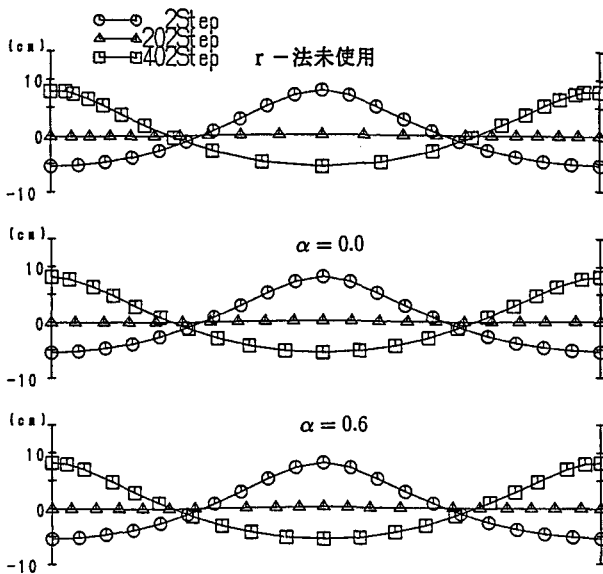


図-3 自由水面節点位置

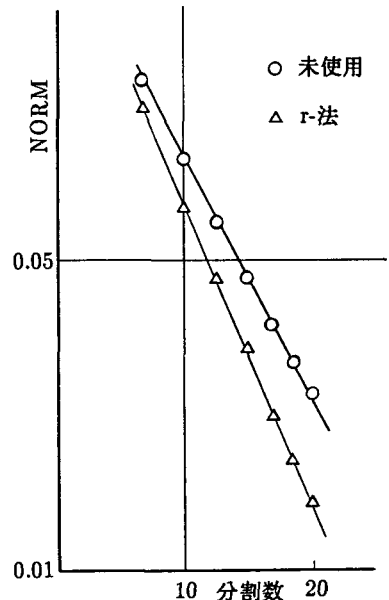


図-4 分割数とノルム