I－309　有限要素熱伝導型方程式のための陰的2段階直接時間積分法

東京工業大学工学部　正　員　吉田　裕
東京工業大学大学院　学生員　○魚地征一郎
東京大学大学院　榎　裕二

1．はじめに　流れの場を対象とする大規模問題の解析が広く行われるようになってきているが、高レイノルズ数領域を対象とする場合には、例え解が得られても安定性の面からの制約を受けた結果であるために、信頼度の高い解が得られていない場合がほとんどである。

本研究は、信頼度の高い解析を行うための鍵となる直接時間積分法を対象として、これの高精度化を目指して種々の改良策を試みた結果を報告するものである。

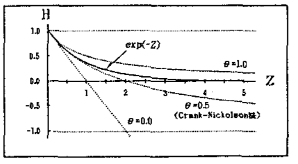
2．基礎とする時間積分公式　時間に関する微分項の分布を線形分布と仮定し、これを積分して得られる公式にパラメータκを導入して一般化したものが式①である。有限要素法によって離散化して得られる熱伝導型方程式を、パラメータαを導入して変形したものが式②である。これらの2つの式と式③とから式④のような積分漸化式が得られる。本研究では式④の積分漸化式を基礎とする。

$$\boldsymbol{x}_{<t+\Delta t>}=\boldsymbol{x}_{<t>}+\Delta t\{\kappa\dot{\boldsymbol{x}}_{<t+\Delta t>}+(1-\kappa)\dot{\boldsymbol{x}}_{<t>}\} \quad ①$$

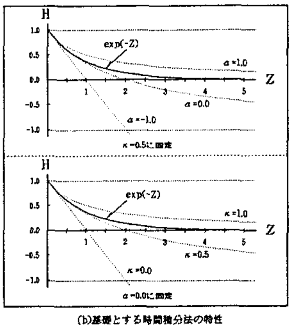
$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}_{<t+\Delta t>}+(1+\alpha)\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_{<t+\Delta t>}-\alpha\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_{<t>}=\overline{\boldsymbol{f}}_{<t+\Delta t>} \quad ②$$

$$\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{x}}_{<t>}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}_{<t>}=\overline{\boldsymbol{f}}_{<t>} \quad ③$$

$$\left[\boldsymbol{M}+\Delta t\cdot\kappa(1+\alpha)\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{x}_{<t+\Delta t>}=\left[\boldsymbol{M}-\Delta t\cdot\{1-\kappa(1+\alpha)\}\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{x}_{<t>}+\Delta t\{\kappa\overline{\boldsymbol{f}}_{<t+\Delta t>}+(1-\kappa)\overline{\boldsymbol{f}}_{<t>}\} \quad ④$$



(a) θ法の特性



(b) 基礎とする時間積分法の特性

図1．パラメータの選択によって得られる特性曲線

3．基礎とする時間積分法の特性　1自由度系$M\dot{x}+Kx=0$を対象として、式④から得られる積分作用素H（$x_{<t+\Delta t>}=Hx_{<t>}$）の特性がパラメータ$\kappa$および$\alpha$によってどのように変るかを理論解$exp(-Z)$（$K/M=\omega$, $Z=\omega\cdot\Delta t$）と比較して示したものが図1である。図1から明らかなように、式④の積分漸化式はパラメータの選択の仕方によってθ法と同じ特性を表すことが可能であり、式④はθ法を包含するものである。

4．陰的2段階積分法の試み　1積分時間間隔Δtを、$0\sim s\cdot\Delta t$で表される前半部と$s\cdot\Delta t\sim\Delta t$で表される後半部に分け、前半部と後半部のそれぞれに導入するパラメータを区別して、式④の公式を適用したものが式⑤および式⑥である。式⑤、⑥によって構成される2段階積分法においては、パラメータs, κ_1, κ_2, α_1, α_2の組み合わせで幅広い特性を表すことが可能である。

$$\left[\boldsymbol{M}+s\Delta t\kappa_1(1+\alpha_1)\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{x}_{<t+s\Delta t>}=\left[\boldsymbol{M}-s\Delta t\{1-\kappa_1(1+\alpha_1)\}\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{x}_{<t>}+s\Delta t\{\kappa_1\overline{\boldsymbol{f}}_{<t+s\Delta t>}+(1-\kappa_1)\overline{\boldsymbol{f}}_{<t>}\} \quad ⑤$$

$$\left[\boldsymbol{M}+(1-s)\Delta t\kappa_2(1+\alpha_2)\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{x}_{<t+\Delta t>}=\left[\boldsymbol{M}-(1-s)\Delta t\{1-\kappa_2(1+\alpha_2)\}\boldsymbol{K}\right]\boldsymbol{x}_{<t+s\Delta t>}+(1-s)\Delta t\{\kappa_2\overline{\boldsymbol{f}}_{<t+\Delta t>}+(1-\kappa_2)\overline{\boldsymbol{f}}_{<t+s\Delta t>}\} \quad ⑥$$

5．2段階積分法としての特性　式⑤および⑥によって構成される2段階積分法の積分作用素は式⑦のように表される。

$$H=\frac{\{1-(1-\kappa_1(1+\alpha_1))sZ\}\{1-(1-\kappa_2(1+\alpha_2))(1-s)Z\}}{(1+\kappa_1(1+\alpha_1)sZ)(1+\kappa_2(1+\alpha_2)(1-s)Z)} \quad ⑦$$

パラメータの組み合わせによって、例えば図2のような特性曲線が得られる。

６．検証のための解析例　対象とする問題（図３）は、左辺から右辺に向かう一様な流速場（u=4.76 m/hr）にある、辺長１ｍ、初期温度が１００℃の正方形領域のすべての周辺が時刻 $t=t_0$ において瞬間的に０℃に拘束される場合の、領域内の温度分布の時間的な変化を求める、２次元移流拡散問題である。

図４に示した結果は、解析によって得られた0.1 hr後および0.2hr後の対象領域の中央線上の温度分布を比較して示したものである。図４（ａ）は、相対的に小さな時間増分のもとでの結果を、ほぼ正解と見なせる非常に小さな時間増分のもとでの結果と比較して示したものである。ある程度小さな時間増分をとる場合には積分法の違いによらず妥当な解が得られることが分かる。図４（ｂ）に示したものは、非常に大きな時間増分を用いた場合の解析結果であるが、Crank-Nickolson法による解析で生ずる折線状の解の振動が、ここに示した２段階積分法によって抑制されることが分かる。

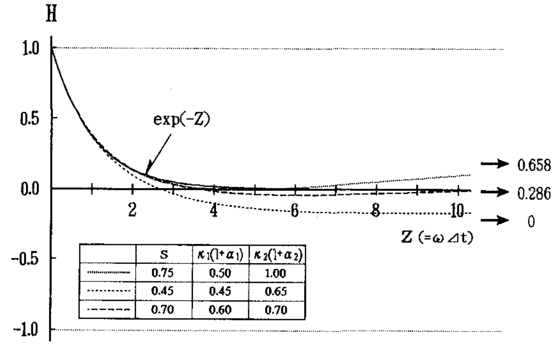


図２．２段階積分法によって得られる特性曲線の例

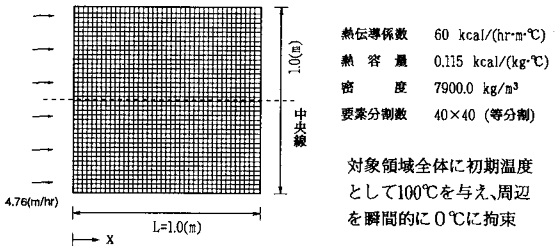
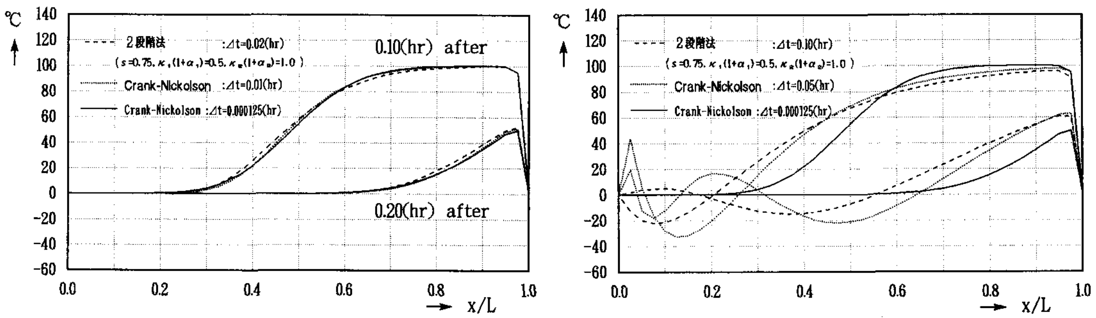


図３．解析対象の諸元



(a) 相対的に小さな時間増分による解　　(b) 大きな時間増分による解

図４．対象領域中央線上の温度分布

おわりに　以上に、流れの解析で基礎となる、熱伝導型方程式の直接時間積分法の高度化を目指して試みた改良策についてまとめた。大規模問題を対象とする場合には高次の成分が取り込まれることになり、どんなに小さな時間増分で解析を行う場合でも、必ず積分法の特性との相対で大きな $\omega\cdot\Delta t$ に対応する評価が含まれ、これが解析の安定性に大きな影響を及ぼすことにつながるので、効率よく計算をすすめることができ、その上で特性の優れた時間積分法を考えることは、数値シミュレーションの実用問題への有意な適用の鍵となる。

参考文献

(1) 吉田　裕：有限要素法による流れ解析の基礎，有限要素法とその周辺技術　第８章，日本鋼構造協会，pp. 169～184，1993年11月

(2) 吉田　裕・藤原　亨・野村卓志：熱伝導型方程式の直接時間積分法と高精度化のアルゴリズム，土木学会論文報告集，第313号，pp. 23～36，1981年9月