土木学会第49回年次学術講演会（平成６年９月）

I－307　円形境界で接合する異質弾性体の亀裂近傍の応力関数の構成法

佐藤鉄工(株)　正会員 ○村瀬安彦
愛知県　正会員　八谷豊幸
岐阜大学工学部　正会員　中川建治

【１】 まえがき

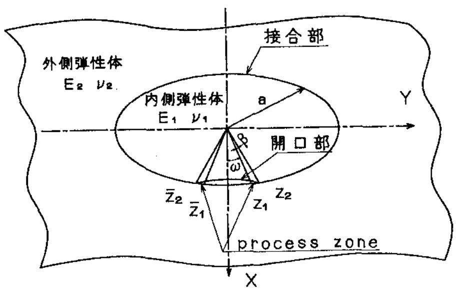
弾性係数の異なる２種類の弾性体が接合されている境界面に，未接合部分を持つ接合部はインターフェイスクラック(接合面亀裂）と名付けられている．著者らはこの問題に対し，開口部先端に process zone と称する応力も変位も生じて滑らかな開口を構成する関数 H(z) を定義し応力関数を導く手法を見つけ出し，これにより無限遠方で一様引張力が作用する場合と原点にねじり力が作用する場合の応力関数を得た．

本論文では円形接合面にインターフェイスクラックを有している問題に対し，境界条件を満たす応力関数の一般解の構成法と応力関数群を導いたのでここに報告する．

【２】 開口関数の構成

対象とするモデルは，図１に示すように弾性係数の異なる材料が円周方向に沿って接合されているものとし，中心軸から$|\theta|\leq\omega$の境界部（z_1から$\bar{z}_1$)が未接合になってクラックを構成しているものとする．z_1から$\bar{z}_1$に至る任意曲線に沿って開口する曲面は次式で表される．

$$H_0(z,z_1,\bar{z}_1)=\frac{1}{2}\left[\log\left(\frac{z-\bar{z}_1}{z-z_1}\right)\right]=H_{0r}+iH_{0i}$$



図－１　解析モデル

急変化する応力分布を平滑化する手法は応力も変位も生ずる区間(process zone:$z_1\sim z_2$, $\bar{z}_1\sim\bar{z}_2$)を設定し，この区間内で重み積分を行う方式を採用する．重み関数$\rho_j(t)$は２次式，３次式，４次式等が考えられるが，条件は process zone において関数値が実数になること，そして積分値が１になることである．

$$\text{開口関数}\quad H(Z)=\int_{Z_1}^{Z_2}\int_{\bar{Z}_2}^{\bar{Z}_1}H_0(z,t_1,t_2)\rho_1(t_1)\rho_2(t_2)\,dt_1dt_2\ ,\quad \int_{Z_1}^{Z_2}\rho_j(t)dt=1$$

【３】 境界条件を満足する応力関数

(1) 境界条件

応力関数が満足する最低限度の境界条件として次のものを設定する．

a)　クラック部分では応力が$\sigma_r=0$, $\tau_{r\theta}=0$

b)　$|\theta|>\omega+\beta$の接合線上では応力も変位も連続

c)　process zone $\omega<|\theta|<\omega+\beta$では$\sigma_r$, $\tau_{r\theta}$が連続で開口変位 u, v は滑らか

(2) 要素関数

円周接合面のクラックに関する境界条件を満たす要因となる要素関数 $f_k(z)$ ($k=1\sim4$) は，開口関数 H(z) と bielastic constant α より次のように定義する．

$$f_1=\cosh\{(1+i\alpha)H\}-\cosh\{(1-i\alpha)H\}\qquad f_3=i\cosh\{(1+i\alpha)H\}+i\cosh\{(1-i\alpha)H\}$$

$$f_2=\sinh\{(1+i\alpha)H\}+\sinh\{(1-i\alpha)H\}\qquad f_4=-i\sinh\{(1+i\alpha)H\}+i\sinh\{(1-i\alpha)H\}$$

$$\alpha=\frac{1}{\pi}\log\left\{\frac{\dfrac{K_2}{G_2}+\dfrac{1}{G_1}}{\dfrac{K_1}{G_1}+\dfrac{1}{G_2}}\right\}$$

$K_j = 3-\nu_j$　（$j=1$; 内側，$j=2$; 外側）
ν_j = ポアソン比
G_j = せん断弾性係数

(3)　応力関数の一般型

平面弾性問題を複素変数 z で表される解析関数（$\Psi(z)$ と $\Phi(z)$）で示し，応力は関数の実数部を採用することにする．

$$\nabla^2\nabla^2 W(z,\bar{z})=0 \qquad W=\bar{z}\Psi+\Phi \qquad 2G(u-iv)=K\overline{\Psi(z)}-z\overline{\Psi'(z)}-\overline{\Phi'(z)}$$

内側弾性体(E_1, G_1, K_1, ν_1)及び外側弾性体(E_2, G_2, K_2, ν_2)それぞれに対する Ψ, Φ は

$$\Psi_1(z) = D_{11}\phi_1(z) + D_{12}\phi_2(z) \qquad \Psi_2(z) = D_{21}\phi_1(z) + D_{22}\phi_2(z)$$

$$\Phi_1(z) = D_{11}\phi_1(z) + D_{12}\phi_2(z) \qquad \Phi_2(z) = D_{21}\phi_1(z) + D_{22}\phi_2(z)$$

である．ここで D_{11}～D_{22} は任意定数であって，境界の応力度の連続性より $D_{11}=\pm D_{21}$, $D_{12}=\pm D_{22}$，変位の連続性より下記となる．

$$\frac{D_{11}}{D_{12}} = \pm\frac{\left(\dfrac{K_2+1}{G_2}+\dfrac{K_1+1}{G_1}\right)}{\left(\dfrac{K_2-1}{G_2}-\dfrac{K_1-1}{G_1}\right)}\tanh\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

(4)　応力関数の基本解　ϕ_j, ϕ_j, F_j

応力関数を決定するために Ψ_j, Φ_j へ代入する ϕ_j, $\phi_j(j=1,2)$ は，表-1 に示す関数の次数と Type によって分類される Q(z) と，表-2 に示す要素関数のモードで定義される $g_1(z)$, $g_2(z)$ との任意の組合わせによって構成される．

$$\phi_1(z)=zF_1(z) \qquad \phi_1(z)=-a^2F_1(z)$$

$$\phi_2(z)=zF_2(z) \qquad \phi'_2(z)=-a^2F'_2(z)-2\frac{a^2}{z}F_2(z)$$

$$F_1(z)=Q(z)g_1(z) \qquad F_2(z)=Q(z)g_2(z)$$

Mode と Typeはどのような組み合わせを採用しても円周上のインターフェイスクラックとしての最低境界条件を満足する応力解が得られる．

表-1　関数の次数と Type 別による Q(Z)

次数	Type	Q(z)
1	1	1
	2	$\left(\frac{z}{a}+\frac{a}{z}\right)$
	3	$i\left(\frac{z}{a}-\frac{a}{z}\right)$
	4	$\left(\frac{z}{a}+\frac{a}{z}\right)i\left(\frac{z}{a}-\frac{a}{z}\right)$
⋮	⋮	⋮
n	2	$\left(\frac{z}{a}+\frac{a}{z}\right)^n$
	3	$(i)^n\left(\frac{z}{a}-\frac{a}{z}\right)^n$
	4	$\left(\frac{z}{a}+\frac{a}{z}\right)^j(i)^{n-j}\left(\frac{z}{a}-\frac{a}{z}\right)^{n-j}$

表-2 mode of function　$g_1(z)$, $g_2(z)$

mode	$g_1(z)$	$g_2(z)$
1	$f_1(z)$	$f_2(z)$
2	$f_3(z)$	$f_4(z)$
3	$if_2(z)$	$if_1(z)$
4	$if_4(z)$	$if_3(z)$

【４】　まとめ

ここに示したものは，円形接合面亀裂の解として応力集中の特異性を回避し，有限で滑らかな応力分布を求める手法を導き，さらにそれによる応力関数の一般解を示したものであろう．

a) 開口関数H(z)の構成法は集積特異点を消滅させる手法そのものである．そして重み関数 $\rho_j(t)$ は積分値が１となる等の条件のみ必要であり，接合材料および実際の応力分布に応じて任意に変化させ得るものである．

b) 関数 $f_K(H)$ は応力関数の基本構成要素であって円周上で開口を形成し，接合面亀裂の境界条件を満足させる基本項である．

c) z あるいは a/z を $F_j(z)$ に乗じて形成させる応力関数の基本解は無限遠方の収束・発散の解等の応力場を構成する基本型を意味する．

d) 如何なる重み関数を用いて H(z) を構成するか，応力関数基本解の $F_j(z)$ としてどの Type を採用するか，何組の応力関数を重ね合わせて解を設定するかは解析対象とする材料と応力分布に応じて決められるべきであろう．

【参考文献】

1)村瀬・中川：円形境界で接合する異質弾性体の未接合領域近傍の応力分布解析
土木学会論文集 No.483/I-26, pp.41～pp.49, 1994.1