I－305

面外荷重下での偏心接合層の円形弾性介在物を有する弾性体の基本解

山梨大学大学院　学生員○杉坂　憲明
山梨大学工学部　正　員　平島　健一

1　はじめに

二次元平面状態下の無限に拡がった領域に無限遠より働く面外せん断荷重や有限位置に集中力, あるいは点転位などの特異荷重ないし撹乱が作用した場合の標題の問題は, その工学的な重要性ならびに他への応用性から閉じた型の解析解を求める試みが従来よりなされている.

本論文では, 偏心接合層円形介在物を有し, その介在物が中空や弾性体または剛体の場合についての面外の無限遠荷重や有限位置に特異荷重や転位などの撹乱が作用した場合の問題の応力ならびに変位についての一般的な解析式を誘導する.

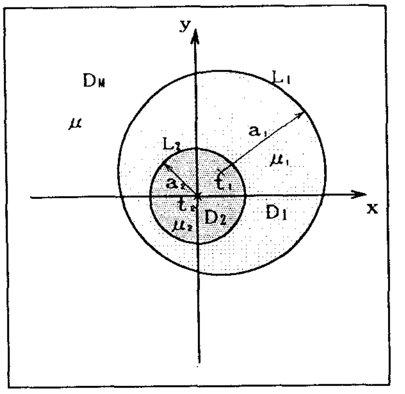

図１．２円形弾性介在物の幾何形状

2　応力・変位を求める公式

対象となる応力・変位成分は xy平面に垂直な方向の座標を zとして, 面外せん断応力τ_{xz}, τ_{yz}および変位 u_zであり, いずれも面内座標 (x,y) のみの関数である. 物体力を無視した釣合式および構成式は次式のように与えられる.

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0,\\&\tau_{xz}=\mu\frac{\partial u_z}{\partial x},\ \tau_{yz}=\mu\frac{\partial u_z}{\partial y}.\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(1)$$

ここに,μはせん断弾性係数である.

図１に示すように円形境界 L を有する無限に拡がった領域を複素平面 $t=x+iy$ とする. 円形境界 L に沿う極座標系 (r,θ) の任意点における応力・変位を求める公式は複素関数 $\phi(t)$ を用いて次式のように与えられる.

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{\theta z}+i\tau_{rz}=e^{i\theta}\ \phi'(t),\\&u_z=Im[\phi(t)]\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(2)$$

3　偏心接合層の円形弾性介在物の場合の基本解

図１のように媒体・介在物が存在している場合, 境界 L_1 上で次の式を定義する.

$$At=\frac{a_1^2}{\bar{t}_1-\bar{t}}+t_1,\ \alpha_1=\frac{\mu_1-\mu}{\mu_1+\mu}.\quad\cdots\cdots(3)$$

ここに,t_1はの介在物の中心;a_1は介在物の半径; およびμ,μ_1はそれぞれのせん断弾性係数とする. 境界条件として $(t=t_1+a_1e^{i\theta})$ にて,

(I) 応力の連続性　$\tau_{rz}^{(M)}=\tau_{rz}^{(1)}$,

(II) 変位の連続性　$u_z^{(M)}=u_z^{(1)}$.

を与え, 境界 L_1 で上の境界条件を満足させるように考慮すると, 次のような関係式が得られる.

$$\left.\begin{aligned}&\phi_M(t)=\phi(t)+\alpha_1\overline{\phi(A_1t)},\\&\phi_1(t)=\phi(t)+\alpha_1\phi(t).\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(4)$$

これを境界 L_1,L_2 で満足するように繰り返し計算を行った結果, 次のような関係式が得られる.

媒体内に対し,

$$\phi_M(t)=\phi(t)+\alpha_1\overline{\phi(A_1t)}+\alpha_2(1+\alpha_1)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^{2n}\{\overline{\phi(A_1t)}+\alpha_1\phi(A_2A_1t)+\alpha_1\alpha_2\phi(t)+\alpha_1^2\alpha_2\overline{\phi(A_1t)}\},\quad\cdots\cdots(5)$$

１番目の介在物内に対し,

$$\phi_1(t)=(1+\alpha_1)\{\phi(t)+\alpha_2(1+\alpha_1)\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^{2n}(\overline{\phi(A_2t)}+\alpha_1\alpha_2\phi(t))\},\quad\cdots\cdots(6)$$

2番目の介在物内に対し，

$$\phi_2(t) = (1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\{\sum_{n=0}^{\infty}(\alpha_1\alpha_2)^{2n}(\phi(t)+\alpha_1\alpha_2\overline{\phi(A_2t)})\}. \quad (7)$$

ここに、

$$A_1t = \frac{a_1^2}{t-t_1}+\overline{t_1}, \quad A_2t = \frac{a_2^2}{t-t_2}+\overline{t_2}, \quad A_2A_1t = \frac{(a_2^2+t_2\overline{t_1}-|t_2|^2)t - t_1(a_2^2-|t_2|^2)+t_2(a_1^2-|t_1|^2)}{(\overline{t_1}-\overline{t_2})t-(\overline{t_1}-\overline{t_2})t_1+a_1^2}. \quad (8)$$

$$\alpha_1 = \frac{\mu_1-\mu}{\mu_1+\mu}, \quad \alpha_2 = \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}. \quad (9)$$

以上が2個の円形介在物を有する弾性体の基本解となる．また各種の問題の一般解を求めるためには，式(5)～(7)の主要部 $\phi(t)$ に次式を代入して得られる．

[I] 無限遠から一様な面外せん断荷重が作用する場合．

$$\phi(t) = (\tau_{yz}^{\infty} + i\,\tau_{xz}^{\infty})\,t \quad (10)$$

[II] 領域内の一点に面外からの集中力 Z および面外方向の点転位 $[u_z]$ が作用する場合．

$$\phi(t) = \frac{\mu_M[u_z]-iZ}{2\pi}\ ln\,(t-t_0) \quad (11)$$

4 数値計算例

ここでは前節で掲示した解析解を用い数値計算例を示す．その一例として面外方向の集中力 Z が作用する場合を取り上げる．

2円孔を偏心させ内側の円孔を半径の $\frac{1}{2}$ だけ x 軸の正方向にずらす．半径比を 1：2 にし弾性係数比を媒体，介在物1，介在物2を 1：2：4 にとり，集中力 Z の作用点 t_0 を x 軸上に沿って移動する距離パラメータ λ で表わし，円形境界周縁の応力を求める．

図2に境界1側の応力 τ_{rz} の分布を示す

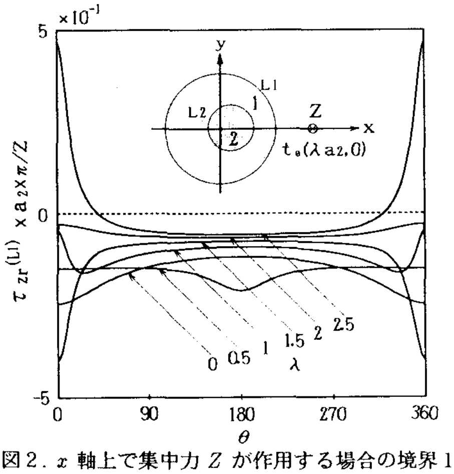

図2．x 軸上で集中力 Z が作用する場合の境界1側の円孔周縁における媒体・介在物1の応力 τ_{rz} （$a_1 = 2a_2, Z_0(\lambda a_2, 0)$ の場合）

図3に境界2側の応力 τ_{rz} の分布を示す．

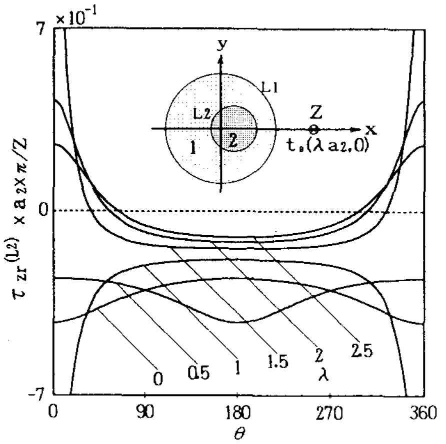

図3．x 軸上で集中力 Z が作用する場合の境界2側の円孔周縁における介在物1・介在物2の応力 τ_{rz} （$a_1 = 2a_2, Z_0(\lambda a_2, 0)$ の場合）

5 おわりに

本報告では，偏心接合層の円形弾性介在物を有し，無限遠より働く面外せん断荷重や任意の有限位置に集中力および点転位が作用する問題の解析解を求めた．また，数値計算例としてこれらの解を用いて集中力が働く場合の応力分布を示した．

参考文献

[1] E.Honein・T.Honein・G.Herrmann,Qaurterly of Applied Mathematics 3-L, (1992),479.

[2] 平島・木村・広瀬，機論,57-540,A(1991),211.

[3] 田中・平島・広瀬・T.MURA，機論,58-549,A(1992),77.

[4] 森口，2次元弾性論,(1957),70，岩波書店．