

I-303

薄板曲げの剥離問題の解析

JR東海 三輪昌弘 名工大 長谷部宣男
名工大 中村卓次 日本車輛 村瀬義昭

1 はじめに 一般に変位拘束を受け
る弾性材料の拘束端は、応力の特異性を示
しクラックや剥離が生じやすい。著者らは、
平面問題でのクラック¹⁾や剥離²⁾の解析、
薄板曲げ問題でのクラックの解析³⁾などを
行ったが、薄板曲げの剥離問題の解析例は
少ないようである。本報告では有理写像関
数と複素応力関数による解法で、剥離の応

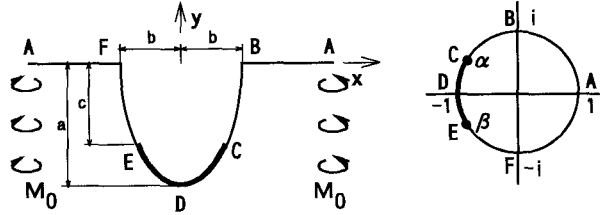


図-1 解析形状とそれに対応する単位円

力強度(SID; Stress Intensity of Debonding)の表示方法を導き、解析例として図-1に示す半楕円形状の切
欠きを有する半平面が、切欠き内の一部(CDE)を剛に拘束される場合を示す。

2 応力関数の一般解³⁾ 解析形状を単位円内に写像する有理写像関数 $\omega(\zeta)$ を用い、一様曲げモー
メント M_0 と一部に剛拘束の境界条件を与えた場合の応力関数 $\phi(\zeta)$ の一般解は次式で与えられる。

$$\phi(\zeta) = \chi(\zeta) \left[\frac{1}{\kappa} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{A_k} B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} - \frac{M_0 E_0}{4D \chi(1)(1+\nu)(1-\zeta)} - \frac{M_0}{4D \kappa(1+\nu)} \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \right];$$

$$\omega(\zeta) = \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_c; \quad \chi(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{1-\lambda} (\zeta - \beta)^{\lambda}; \quad \lambda = 0.5 - i \frac{\ln \kappa}{2\pi}; \quad B_k = \frac{E_k}{\omega'(\zeta_k')} \quad \dots(1)$$

ここに $\kappa = (3+\nu)/(1-\nu)$ 、 ν はPoisson比、 D は曲げ剛さ、 $E_0, E_k, E_c, \zeta_k, \zeta_k', A_k$ は定数である。

$\chi(\zeta)$ はPlemelj関数で、その一回微分の形は剥離先端点すな
わち変位拘束端 $\zeta = \alpha, \beta$ で特異性を示す。

3 応力分布 解析例として、式(1)を用いて得られる応
力分布の一例を図-2に示す。剛拘束端では応力集中が生じてお
り、ここから剥離が発生する可能性がある。

4 剥離の応力強度 応力のオーダーでの応力関数は式(1)
の一階微分で得られ、 $g(\zeta), g_0(\zeta)$ を正則な関数として次
式の形に表せる。

$$\phi'(\zeta) = (\zeta - \alpha)^{-\lambda} (\zeta - \beta)^{\lambda-1} g(\zeta) + g_0(\zeta) \quad \dots(2)$$

また、物理面での応力関数を $\Phi(z)$ 、剥離点 z_B が点 β に対応し、
 β_0 を定数、 $O(z)$ を正則な関数とすると剥離先端近傍では
 $\Phi'(z)$ は次式で近似できる。

$$\Phi'(z) = \beta_0 (z - z_B)^{\lambda-1} + O(z) \quad \dots(3)$$

したがって式(2),(3)から、 $z \rightarrow z_B$ の極限を求めることにより剥離の応力強度 $\widetilde{\beta_0}$ は次式で得られる。

$$\beta_0 = \frac{|\omega'(\beta)(\beta - \alpha)|^{1-\lambda} g(\beta)}{\omega'(\beta)(\beta - \alpha)} \exp\{i(1-\lambda)(\theta_\alpha - \theta_\beta)\}; \quad \theta_\beta = \lim_{\zeta_R \rightarrow \beta} [\arg(\zeta_R - \beta)];$$

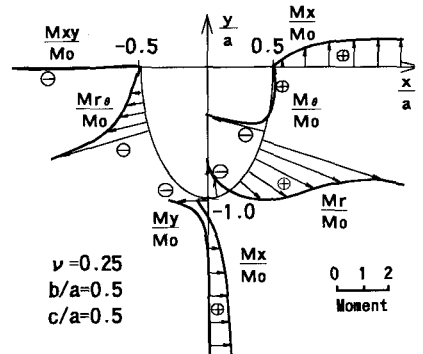


図-2 応力分布

$$\theta_a = \arg(\beta - \alpha); \delta = \ln \kappa / (2\pi); \widetilde{\beta}_0 = 2\sqrt{2}D(1+\nu)\exp(-\pi\delta)\beta_0 \quad \cdots(4)$$

ここに r は単位円の剛境界上の点で、 $\widetilde{\beta}_0$ と β_0 との間に乗じた係数はクラックを同一材料の剥離に相当すると考えた場合に、S I Dと応力拡大係数(SIF)が一致するように定めた。剥離先端近傍の応力は $\widetilde{\beta}_0$ を用いて次式で表せる。

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{\sqrt{2r}(1+\nu)} \{ (1-\nu) \cosh \pi \delta - 2(1+\nu) \sinh \pi \delta \} |\widetilde{\beta}_0| \cos(\theta_{\beta_0} - \delta \ln r); \\ M_y &= \frac{-(3+\nu)}{\sqrt{2r}(1+\nu)} \cosh \pi \delta |\widetilde{\beta}_0| \cos(\theta_{\beta_0} - \delta \ln r); \\ M_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2r}(1+\nu)} \{ (1+\nu) \cosh \pi \delta - 2 \sinh \pi \delta \} |\widetilde{\beta}_0| \sin(\theta_{\beta_0} - \delta \ln r); \quad \theta_{\beta_0} = \arg[\widetilde{\beta}_0] \quad \cdots(5) \end{aligned}$$

上式より応力の強さは $|\widetilde{\beta}_0|$ で表されることがわかる。ここで、式(4)で得られた図-1の形状のS I Dの解析例を示す。 $\widetilde{\beta}_0$ は複素数で、次式で無次元化したS I D、Fa, Fbを用いて得られた結果を図-3に示す。

$$Fa = |\widetilde{\beta}_0| / (M_0 \sqrt{a}); \quad Fb = |\widetilde{\beta}_0| / (M_0 \sqrt{b}) \quad \cdots(6)$$

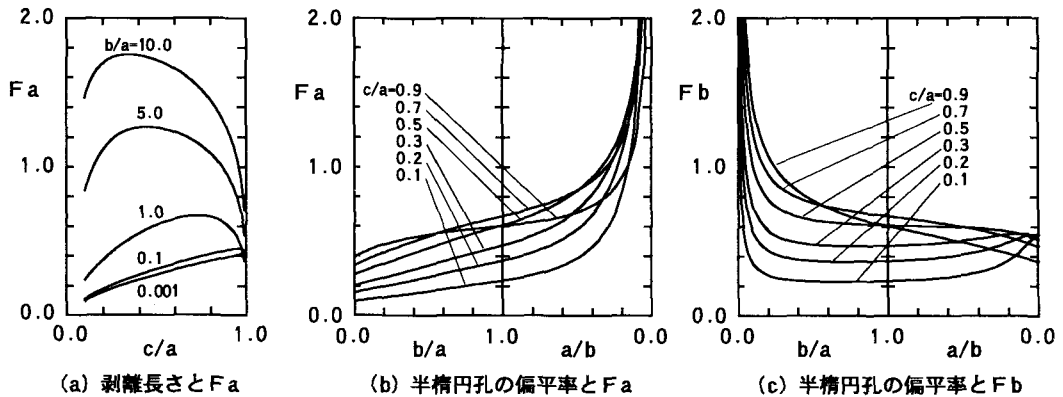


図-3 剥離の応力強度 Fa, Fb ($\nu=0.25$)

図-3(a)は半楕円孔の偏平率(b/a)をパラメータとし、剥離長さ(c/a)を変化させた場合のFaで、 b/a が大きいほど全体的にFaも大きくなるが、ひとつの b/a に着目すれば b/a が大きくなるとFaは右下がりとなる。すなわち $b/a=1.0$ 程度より大のときには、材料の剥離に対する靱性値との関係により、剥離が途中で停止する可能性がある。逆に b/a が小さいときには、Faの絶対値は小さいので剥離は発生しにくい、一度発生すると止まらない可能性がある。図-3(b),(c)は c/a をパラメータとして b/a を変化させたときのFa, Fbで、前者は切欠き深さ a を一定として開口長 b を変化させたときのS I D、後者はその逆の場合と考えることができる。 a が一定の場合には、前述のとおり b が大きいほどS I Dも大きく、 $a/b=0.2$ 付近から急増する。また、 b が一定の場合には全体的に a が大きいほどS I Dも大きく、 $b/a=0.2$ 付近から急増する傾向がみられ、いずれも剥離が発生しやすくなる。

5 まとめ 薄板の面外曲げ問題において、有理写像関数と複素応力関数による解法で剥離の応力強度の表示方法を示し、半楕円切欠きを有しその一部を剛に拘束され、一様曲げを受ける半平面を解析例として剛境界からの剥離について考察を行った。

[参考文献] 1) Hasebe et al, 1980, Ingenieur Archiv 2) Hasebe et al, 1987, Int. J. Frac.
3) Hasebe, 1984, J. Engrg. Mech.