

京都大学工学部	正	西村直志
近畿日本鉄道	非会員	河村陽一郎
京都大学大学院	同上	辻 浩樹
京都大学工学部	正	小林昭一

1. 序

本報では選点法積分方程式法を用いた時間域クラック形状決定逆問題の解法のうち、とくに波動方程式に支配される場合について最近得られた結果を述べる。これまでの変分法を用いた積分方程式法に比べて、より形状自由度が大きい問題への適用を目指している。

2. 3次元時間域波動順問題と逆問題

3次元波動方程式のクラック順問題を考える。 $\mathbb{R}^3$ 内のクラック S による入射波 u_I の散乱問題の解は

$$u(x, t) = u_I(x, t) + \int_S \int_0^t \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y, t - \tau) \varphi(y, \tau) d\tau dS_y$$

と書ける。ここに φ は開口変位であり、 G は波動方程式の基本解である。クラックが traction free であるとき、開口変位は積分方程式

$$0 = \frac{\partial u_I}{\partial n}(x, t) + \int_S \int_0^t \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(x, y, t - \tau) \varphi(y, \tau) d\tau dS_y \quad x \in S$$

を解いて求める。ここに面積分は有限部分の意味で評価する。

開口変位 φ が求まると、散乱場 $u_S := u - u_I$ は φ を密度とする二重層ポテンシャルで書ける。原点から $\hat{x}$ の方向でクラックサイズに比べて十分遠い地点において散乱場を計測すると、これには遠方場近似が使え、

$$u_S \sim \frac{\text{const.}}{|\mathbf{x}|} F(\hat{x}, T), \quad F(\hat{x}, T) = \int_S \hat{x}_i n_i(y) \dot{\varphi}(y, T + (\hat{x} \cdot y)/c) dS_y$$

となる。ここに $T := t - |\mathbf{x}|/c$ であり、 c は波速である。以下簡単のために諸量に適当な無次元化を行い、 $c=1$ としてあるとする。

対応する逆問題ではクラック S の位置や形状は未知である。これを決定するためにいくつかの既知の入射波 u_I^i ($i=1, 2, \dots$) による S からの散乱波をいくつかの方向 $\hat{x}^j$ ($j=1, 2, \dots$) でいくつかの時刻 T^k ($k=1, 2, \dots$) に計測して散乱場の係数 F_0^{ijk} を得る。なお、簡単のため離散系を前提とした書き方をした。考える逆問題は、得られた計測に最も良く適合するクラックを決定するものである。

3. 数値解法と例

まず、順問題の数値解法であるが、クラック問題の超特異積分方程式の数値解法としてこれまで用いていた変分法¹⁾に変えて、本報では選点法を用いる。これは形状の自由度の大きい問題(将来的には複数クラックを含む)への対応を見込んで計算時間を短縮する為である。ただし、選点法では空間的形状関数を選点で C^1 級であるように選ばなければならない。そこで開口変位の形状関数は時間方向区分線形、空間方向区分一定とし、クラックも区分的に平面で近似して数値計算に必要な積分を全て解析的に計算した。

次に、逆問題の解法について述べる。いまクラック S の幾何情報を適当に仮定して、実測と同じ入射波、方向、時刻で観測される散乱場の係数を計算で求めたものを $F^{ijk}(S)$ とする。このとき、クラック S は

$$J(S) := \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} (F^{ijk}(S) - F_0^{ijk})^2$$

で定義されるコスト関数を最小にするものとして決定して良いであろう。数値計算においては S の形状を有限個のパラメータ ξ で記述し、 $J(S)$ を ξ の関数としたうえで非線形計画法で最小化すればよい。

さて、クラックのパラメータ化であるが、本報ではクラック S を平面クラックと仮定し、 S の存在する平面 P が既知である場合を取り扱う。 P 上に $x_{1,2}$ 軸を有する直交直線座標を取り、クラック S が星状領域であると仮定すれば S の縁 ∂S の点を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = r(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

と表すことが出来る。更に半径 $r(\theta)$ を θ の Fourier 級数に展開して、係数を形状パラメータとすればよいが、その場合 (ξ_1, ξ_2) の取り方に伴って S の表示の非一意性が生ずる。そこで本報では

$$r(\theta) = \xi_3 + \sum_{n=2} (\xi_{2n} \cos n\theta + \xi_{2n+1} \sin n\theta)$$

とする。こうすれば

$$\int_0^{2\pi} r(\theta) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} d\theta = 0$$

であるので、 (ξ_1, ξ_2) に関連した非一意性は除ける。このようにして考える逆問題は ξ に関するパラメータ推定問題に帰着された。

以上述べた数値計算法を実際に用いた例を図1に示す。ここでは入射波は平面波2波とし、入射波形は

$$u_i^i = \begin{cases} 1 - \cos(t - N^i \cdot x) & 0 \leq t - N^i \cdot x \leq 2\pi \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases} \quad (i = 1, 2)$$

とする。ここに入射波の進行方向は各々 $N^{1,2} = (1, 0, 0), (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ 、諸量の大きさについては図1参照。遠方場の計測は $\hat{x}^{1-4} = (\pm 1/\sqrt{3}, \pm 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3})$ の4方向で行った。なお、計測データとしてはあらかじめ正解のクラックを用いて数値計算で求めた遠方場を使用した。また、形状パラメータは5個使用した。図に示すように正解への収束が得られた。

文献

- 1) 西村、小林：境界要素法論文集10, 137-142, 1993.

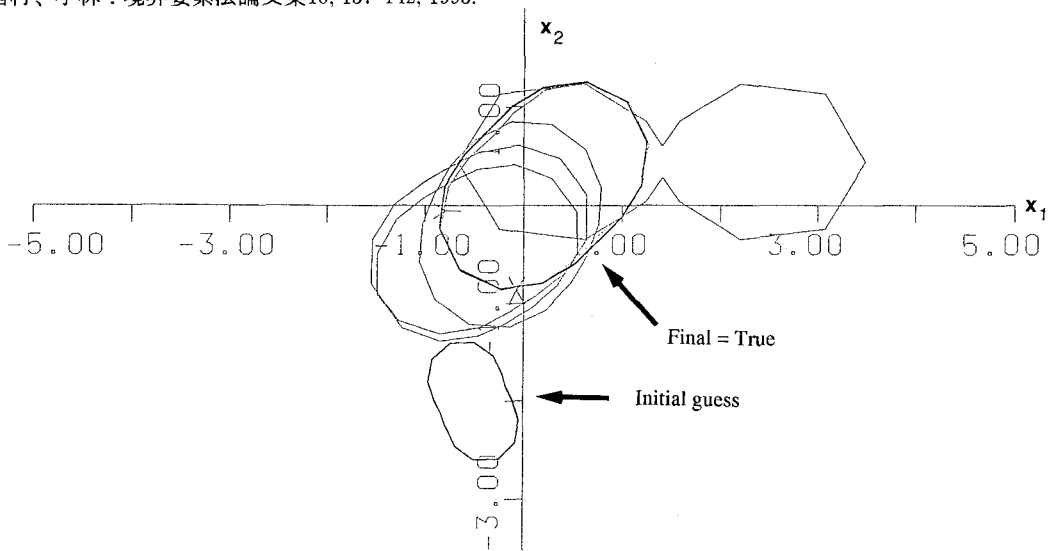


図1. 3次元時間域逆問題. 収束状況