

## I - 290

## 亀裂先端で有限な応力集中を構成する応力関数について

日本国土開発 正会員 ○ 栖原秀郎  
岐阜大学 正会員 藤井康寿  
岐阜大学 正会員 中川建治

## 1. はじめに

著者等は、既にクラックを有する等方等質な無限板が引張り外力等を受ける問題に対して、Westergaardの解を平滑化することにより、プロセスゾーン相当部分を構成する応力関数を導いた。この基本解12組を面内力の種類により熱膨張、せん断、曲げ、引張りの4とおりに分類し、引張りクラックの場合について、有限で滑らかな応力集中を構成し、しかも開口変位についていろいろな形状を表現しうることを示した。ここでは引張り状態に加えて、せん断、曲げ、熱膨張まで含めて有限で滑らかな応力集中を構成し、しかも開口変位についていろいろな形状を表現しうることを示す。

## 2. 解析方法

## (1) 対象モデル

対象のモデルは、図-1に示すように、 $y$ 軸上に長さ $2a$ のクラックを持ち、熱膨張、せん断、曲げ、引張りを受ける等方等質の無限板で境界条件『 $y$ 軸上の $|y| < a + b$ 以外で変位が連続して、 $y$ 軸上の $|y| < a$ で変位は開口を構成し $\sigma_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$ と言う条件』を満足するものとする。

## (2) 平滑化手法

急変化する応力分布を平滑化する手法として、応力と変位の共存区間(process zone)を設定して、この区間で重み積分( $\rho_k$ は2次式あるいは4次式)を行う方式を採用した。

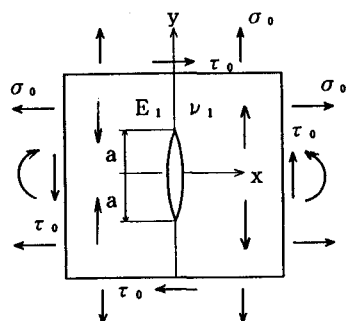


図-1 対象モデル

表-1 開口条件を満たす基本解

| 基本解  | $\phi$                  | $\phi$ or $\phi'$                     |
|------|-------------------------|---------------------------------------|
| その1  | $\phi_1 = f_0$          | $\phi_1 = z f_0$                      |
| その2  | $\phi_2 = f_1$          | $\phi_2 = z f_1$                      |
| その3  | $\phi_3 = i f_1$        | $\phi_3' = i(z f_1' - f_1)$           |
| その4  | $\phi_4 = i f_1$        | $\phi_4' = i(z f_1' - f_1)$           |
| その5  | $\phi_5 = i z f_1$      | $\phi_5 = i z^2 f_1$                  |
| その6  | $\phi_6 = i z f_1$      | $\phi_6 = i z^2 f_1$                  |
| その7  | $\phi_7 = z f_1$        | $\phi_7' = z^2 f_1'$                  |
| その8  | $\phi_8 = z f_1$        | $\phi_8' = z^2 f_1'$                  |
| その9  | $\phi_9 = z^2 f_1$      | $\phi_9 = z^3 f_1$                    |
| その10 | $\phi_{10} = z^2 f_1$   | $\phi_{10} = z^3 f_1$                 |
| その11 | $\phi_{11} = i z^2 f_1$ | $\phi_{11}' = i(z^2 f_1' + z^2 f_1')$ |
| その12 | $\phi_{12} = i z^2 f_1$ | $\phi_{12}' = i(z^2 f_1' + z^2 f_1')$ |

表-2 基本解の種類

| 面内力の種類 | 対応する基本解            |
|--------|--------------------|
| 熱膨張    | (その1) (その6) (その9)  |
| せん断    | (その2) (その5) (その10) |
| 曲げ     | (その3) (その8) (その11) |
| 引張り    | (その4) (その7) (その12) |

$$H_k(z, a, b) = \int_{-b}^{+b} \rho_k(t, a, b) \cdot \frac{1}{2} \log \left( \frac{z+it}{z-it} \right) dt \quad k=2, 4$$

## (3) 解析解

平面弾性問題を複素変数 $z$ で表す複素関数で扱い、応力は実数部を採用する。

$$\nabla^2 \nabla^2 W = 0$$

$$W = \bar{z} \phi + \phi$$

ここで、 $H=H_k(z, a, b)$ と置き $z$ と $f_0 = \cosh H$ ,  $f_1 = \sinh H$ をもって表-1に掲げるような $\phi$ と $\phi$ あるいは $\phi'$ を定義すると、これより構成される応力関数 $W = \bar{z} \phi + \phi$  12組はすべて上記の境界条件を満足する。さらに、これらの12組の応力関数は表-2に示すように、受けている面内力の種類により4とおりに分類される。

## 3. 計算例

2.で求めた平滑化された基本解12組を表-2に示した組み合わせにより重ね合わせて滑らかな開口形状を与える応力関数を導くことができる。せん断、曲げ、熱膨張を受ける場合の例について説明する。表-2に示した熱膨張、せん断、曲げの各応力状態に対応する基本解の組み合わせをとり、それぞれについて次の様に定義する。

熱膨張  $W=D_1(\bar{z}\phi_1+\phi_1)+D_2(\bar{z}\phi_2+\phi_2)+D_3(\bar{z}\phi_3+\phi_3)$   $D_1=1.0, D_2=-1.1, D_3=-0.2$   
せん断  $W=D_4(\bar{z}\phi_4+\phi_4)+D_5(\bar{z}\phi_5+\phi_5)+D_{10}(\bar{z}\phi_{10}+\phi_{10})$   $D_4=1.0, D_5=-1.1, D_{10}=-0.2$   
曲げ  $W=D_6(\bar{z}\phi_6+\phi_6)+D_8(\bar{z}\phi_8+\phi_8)+D_{11}(\bar{z}\phi_{11}+\phi_{11})$   $D_6=1.0, D_8=1.1, D_{11}=-0.2$

ここで、 $E=2.1 \times 10^5 \text{MPa}$ ,  $\nu=0.3$ ,  $a=1 \text{cm}$ ,  $b=0.3 \text{cm}$  とすると、熱膨張およびせん断クラックの場合の変位および応力は図-2 および図-3 のような形状となる。

4. その他の例

著者等の導いた応力関数は、プロセスゾーンを変えたり基本解の組み合わせを変えたりすることにより応力が有限で開口変位に関していろいろな形状を表現しうる。ここでは、引張りクラックの場合のクラック両端のプロセスゾーンの長さの違いによる開口変位および応力集中の変化を図-4 に示す。なお、本研究の手法をさらに拡張して  $y$  軸上の有限部分  $|y| < a$  で連続で、 $|y| > a+b$  がクラック(自由辺)という有限連続板の問題に対してそれぞれの応力状態における応力関数を求めることが可能であり曲げクラックの場合の例を図-5 に示す。

5. むすび

岩盤やコンクリート等の材料では、Westergaard の解のようなクラック先端における無限大の応力集中は不適当である。また、Dugdale の解は塑性域を解析するには、好都合であるが、応力が緩やかに立ち上がる部分が無く、かつ平均応力がいかに小さくなくても  $\sigma_y$  が生じるという点是不自然であろう。たとえばコンクリートや岩盤に適用する場合には、著者等が導いた応力集中が緩やかに立ち上がる関数の方が合理的であろう。この関数は、境界面亀裂の解にも活用し得る。すなわち土木工学の分野で対象とする材料のクラック解析用としては望ましい関数を導き得た。また著者等の導いたこの関数は、コンクリートのクラック進展についての数値シミュレーションや無発破工法の割岩機構の解析等に活用できる。

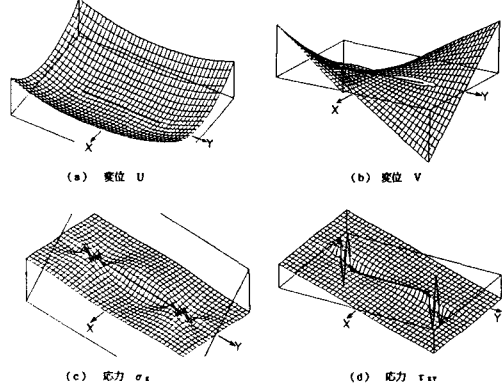


図-2 熱膨張クラックの解

$W=D_1(\bar{z}\phi_1+\phi_1)+D_2(\bar{z}\phi_2+\phi_2)+D_{11}(\bar{z}\phi_{11}+\phi_{11})$   
 $E=2.1 \times 10^5 \text{MPa}, \nu=0.3, a=1 \text{cm}, b=0.3 \text{cm}, b'=0.20 \text{cm}$   
 $D_1=1.0, D_2=1.1, D_{11}=-0.185$

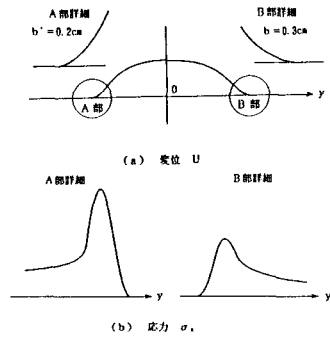


図-4 クラック両端のプロセスゾーンの長さの違いによる開口変位および応力集中の変化(引張り)

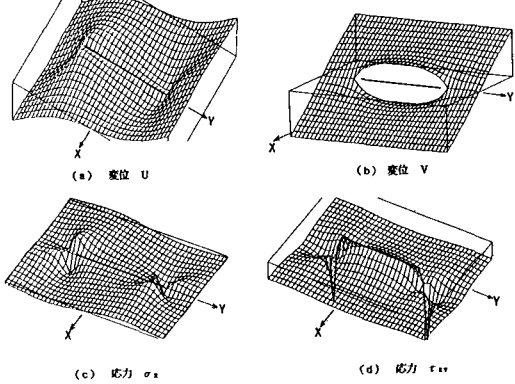


図-3 せん断クラックの解

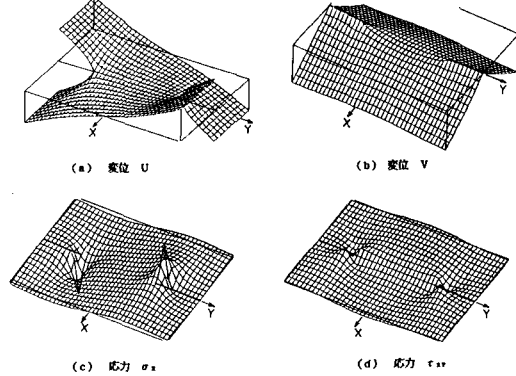


図-5 曲げクラックの解(有限連続の場合)