I - 288

任意形状の空孔または剛体介在物を有する面内問題の解析解とその数値計算例

山梨大学大学院　学生員○木口　昌彦
群馬高専土木科　正　員　木村　清和
山梨大学工学部　正　員　平島　健一

1. はじめに

任意形状の空孔または介在物を有する二次元弾性体の面内問題に対する解析も従来から多数取り扱われている。最近では，直線や曲線のクラック以外にCusp状の先端部を有する任意形状孔の応力拡大係数に関連した研究[1]や，境界要素法および体積力法の基本解として利用するために，任意形状孔を有する二次元弾性体に特異項荷重が作用(存在)する問題の研究[2]がなされている。

本報告においては任意形状の空孔または剛体介在物の二次元面内荷重問題を取り上げ，無限遠一様荷重，回転あるいは任意の有限位置に特異項荷重（集中力・集中偶力）や擾乱（転位・点膨張），またそれらのDipoleタイプの特異項荷重が作用する場合に対する応力，変位および応力拡大係数等についての閉じた型の一般的な解析解とその数値計算例を示す。

2. 基礎方程式と基本解

2.1 内部に任意形状の境界を有する二次元面内問題に対する基本公式

任意形状の境界Lを有する無限に広がった領域を複素平面とし，この z-平面を ζ-平面に等角写像する関数 $\omega(\zeta)$ を次式のように最も一般的な型で定義する。

$$\omega(\zeta)=\lambda_0\zeta+\sum_{k=1}^{\nu}\lambda_k\zeta^{-k}\,. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1)$$

ここに，$\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_\nu$ は境界Lの形状により決まる複素定数である。このとき境界Lに沿う曲座標系 (ξ,η) の任意点における応力，変位および回転を求める公式は，森口により二つの複素関数 $\Phi(\zeta),\Psi(\zeta)$ を用いて次式のように与えられる[3]。

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_\xi+\sigma_\eta+\frac{8iG}{\kappa+1}\tilde{\omega}=4\Phi^{I}(\zeta)\,,\\
&\sigma_\eta-\sigma_\xi+2i\tau_{\xi\eta}=(\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy})e^{2i\phi}\\
&\qquad=2\left\{\overline{\omega(\zeta)}\cdot\Phi^{II}+\Psi^{II}(\zeta)\right\}e^{2i\phi}\,,\\
&u_\xi-iu_\eta=(u_x-iu_y)e^{i\phi}\\
&\qquad=\frac{1}{2G}\left[\kappa\overline{\Phi(\zeta)}-\left\{\overline{\omega(\zeta)}\cdot\Phi^{I}(\zeta)+\Psi^{I}(\zeta)\right\}\right]e^{i\phi}.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$$e^{i\phi}=\frac{\zeta}{|\zeta|}\cdot\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}\,,\quad e^{2i\phi}=\frac{\zeta}{\bar{\zeta}}\cdot\frac{\omega'(\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}}\,. \qquad \cdots\cdots \quad (3)$$

上式中の上添字 I,II は z に関して，それぞれ1,2回の微分を意味する。なお，上式中の κ は平面応力状態のとき $\kappa=\dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ を，また平面ひずみ状態のとき $\kappa=3-4\nu$ をとる。G,ν はせん断弾性係数およびポアソン比である。

2.2 無限遠より一様な応力，回転が作用する場合の解析解

任意形状の境界Lを有する二次元弾性体に無限遠より一様な応力および回転が作用する場合を考える。ここで ζ-平面における境界L上の点を $\sigma(=e^{i\theta})$ とすれば，その境界条件は次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}
&-k_0\Phi(\sigma)+\omega(\sigma)\overline{\Phi^{I}(\sigma)}+\overline{\Psi^{I}(\sigma)}\\
&\qquad=\sum_{m=0}^{\infty}(a_m+ib_m)\sigma^m+\sum_{m=1}^{\infty}(\overline{a_m}+i\overline{b_m})\sigma^{-m}\,.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

ここに，係数 k_0 は境界Lの状態に応じて値をとる。

$$k_0=\begin{cases}-1\ : & \text{境界Lが自由境界のとき}\,,\\ \kappa\ : & \text{境界Lが剛体境界のとき}\,.\end{cases} \qquad \cdots \quad (5)$$

また，a_m,b_m は境界Lの形状と作用荷重により決定される未定係数である。

次に，複素応力関数 $\Phi(\zeta),\Psi^{I}(\zeta)$ を次式にように仮定する。

$$\left.\begin{aligned}
\Phi(\zeta)&=A_0\zeta+\sum_{m=1}^{\infty}A_m\zeta^{-m}\,,\\
\Psi^{I}(\zeta)&=B_0\zeta+\sum_{m=1}^{\infty}B_m\zeta^{-m}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

ここで，式(6)を式(4)に代入し，ζ の同一べきの係数を比較することにより，係数 A_m,B_m が決定される。

しかし，最終的な標題の問題の応力・変位は，これまでに述べた解によって求められる応力・変位に加えて，境界Lをもたない均質な弾性体に無限遠荷重が作用する場合の応力・変位を重ね合わせることにより求められる。

2.3 領域内の一点に特異項荷重および擾乱が作用する場合の解析解

任意形状の境界Ｌを有する弾性体の任意点に集中力，集中偶力，転位(変位の食違い)および点膨張が作用する場合を考える。先に著者らが境界Ｌをだ円形とした場合を対象として，森口による鏡像原理により解を求めた手法[4]をここでも採用すれば，比較的容易に解が求められることになる。そのために次式で定義される補助関数 $\chi(\zeta)$ を導入する。

$$\chi(\zeta)=\overline{\omega}(1/\zeta)\Phi^{I}(\zeta)+\Psi^{I}(\zeta)\;. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

境界Ｌを越えての解析接続を行うと，最終的に複素応力関数は次式のようになる。

$$\left.\begin{aligned}\Phi(\zeta)=&\,M\ln(\zeta-\zeta_0)+\frac{1}{k_0}\Bigg[\overline{N}\ln\left(\frac{1}{\zeta}-\overline{\zeta}_0\right)\\&-\frac{1}{\overline{\omega'(\zeta_0)}}\frac{\overline{K}+\overline{M}\{\omega(1/\overline{\zeta}_0)-\omega(\zeta_0)\}}{(\zeta-1/\overline{\zeta}_0)\overline{\zeta}_0{}^2}\\&+\frac{\overline{M}}{\overline{\lambda}_0}h^{\nu}_{2,\infty}\sum_{k=2}^{\nu}\lambda_k\zeta^{1-k}\\&+\frac{1}{\overline{\lambda}_0}h^{\nu}_{3,\infty}\sum_{j=3}^{\nu}\sum_{k=1}^{j-2}\lambda_j(\overline{M}\,\overline{\zeta}_0{}^k-k\overline{C_k})\zeta^{k+1-j}\Bigg]\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}\chi(\zeta)=&\,k_0\overline{M}\ln(1/\zeta-\overline{\zeta}_0)+N\ln(\zeta-\zeta_0)\\&+\frac{1}{\omega'(\zeta_0)}\frac{K+M\{\overline{\omega}(1/\zeta_0)-\overline{\omega(\zeta_0)}\}}{(\zeta-\zeta_0)}\\&+\frac{M}{\lambda_0}h^{\nu}_{2,\infty}\sum_{k=2}^{\nu}\overline{\lambda}_k\zeta^{k-1}\\&+\frac{1}{\lambda_0}h^{\nu}_{3,\infty}\sum_{j=3}^{\nu}\sum_{k=1}^{j-2}\overline{\lambda}_j(M\zeta_0^k-kC_k)\zeta^{j-k-1}\;.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

また，Dipole問題の解析解を $\Phi_d(\zeta),\chi_d(\zeta)$ とすると，それらは次式で定義される。

$$\left.\begin{aligned}\Phi_d(\zeta)&=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial\zeta_0}\Delta\zeta_0+\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{\zeta}_0}\Delta\overline{\zeta}_0\right\}\;,\\\chi_d(\zeta)&=\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\frac{\partial\chi}{\partial\zeta_0}\Delta\zeta_0+\frac{\partial\chi}{\partial\overline{\zeta}_0}\Delta\overline{\zeta}_0\right\}\;.\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\quad(10)$$

$$\Delta\zeta_0=\frac{\Delta z_0}{\omega'(\zeta_0)}=\frac{\varepsilon e^{i\gamma}}{\omega'(\zeta_0)}\;. \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

式(10)に式(8),(9)を代入することにより解析解が求められる。

3. 応力拡大(特異)係数の算定式

とがり(Cusp)を有する空孔または剛体介在物に種々の荷重が作用すると，そのとがりの先端において必然的に無限大の応力集中が生じる。このときのとがりの先端 $(\zeta=1)$ における応力拡大(特異)係数は次式により求めることができる。Mode I , Mode II に対応する応力拡大(特異)係数を K_I,K_{II} とすると次式で与えられる。

$$\left.\begin{aligned}K_I-iK_{II}&=\lim_{\varepsilon\to1}2\sqrt{2\pi\{\omega(\zeta)-\omega(1)\}}\Phi^{I}(\zeta)\\&=2\sqrt{\pi/\omega''(1)}\Phi'(1)\;.\end{aligned}\right\}\quad(12)$$

ここで，集中力，転位あるいは集中モーメントが作用する場合の解析解 $\Phi(\zeta)$ は式(8)で与えられ，その導関数を求めれば応力拡大(特異)係数が求められる。

また，Dipole問題の場合も同様に式(10)から得られた解析解を式(12)に用いることにより求められる。

4. 数値計算例

代表的な例として，リップタイプの空孔または剛体介在物を有する二次元弾性体に転位が作用する場合のCusp先端における応力拡大(特異)係数 K_I の分布を示す。ここでは，転位を孔の中心から $\mu_0 a$ 離れたところに作用させた場合の分布で，$\theta=-180^\circ\sim0^\circ$ の範囲が自由境界，$\theta=0^\circ\sim180^\circ$ が剛体境界を示している。

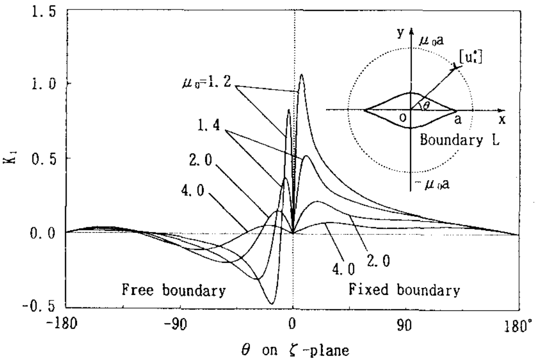

図１　転位[u]が作用する場合の応力拡大係数 K_I

5. まとめ

本報告においては，任意形状の空孔または剛体介在物を有する二次元弾性体に，無限遠一様荷重や回転および集中力，集中偶力，転位などの特異項荷重が作用する問題の解を統一的に整理し，場の全域の応力，ひずみおよび変位等を求められるように必要な応力関数を解析式として提示した。また，それらの解を用いて集中力対や転位対などが作用するDipole問題に拡張するとともに，Cuspを有する空孔または剛体介在物の応力拡大(特異)係数の算定式の誘導も行った。

参考文献

1) Kuang Wu,C.H.,J.Appl.Mech.,49(1982),62,383,525.
2) Chen,Y.Z.,Eng.Fract.Mech.,20-4,(1984),573.
3) 森口,二次元弾性論,岩波講座,(1957),12.
4) 平島,木村,広瀬,機論,58-555,A(1992),2104.