

I - 286

対称な2重連結形状の変位境界値問題

名工大 学生員 市江 保昭

名工大 正 員 長谷部 宣男

名工大 正 員 中村 卓次

[1 はじめに] 平面弾性の混合境界値問題の一つとして、変位の一成分と外力の一成分を与える Simple Support(S.S.)境界と、変位境界を、それぞれ2カ所ずつ有する2重連結形状の混合境界値問題が考えられる。この応用として本報告では、この形状が対称で、変位境界の変位を0とした剛境界、S.S.境界を連続境界とする対称な2重連結形状の変位境界値問題を考える。この問題の複素応力関数の一般解を誘導し、この関数を用いた解析例として応力分布図を示す。また、類似の問題の外力境界値問題の解は既に得られている[1]。

[2 複素応力関数の一般解] 例として図-1に示す矩形孔からクラックCBAHGのあるABCDEFGHAの形状を用いる。

物理面(Z-plane)を、単位円外(ζ -plane)に写像する次式の関数を用いる[2]。

$$Z = \omega(\zeta) = E_0 \zeta + \sum_{k=1}^n \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \quad \dots\dots (1)$$

一般に境界条件式は、単位円外で正則な複素応力関数 $\phi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$ 、有理写像関数 $\omega(\zeta)$ を用いて、次式のように与えられる。

変位境界条件式

$$\kappa \phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2G(u + iv) \quad \dots\dots (2)$$

応力境界条件式

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = i \int (p_x + ip_y) ds \quad \dots\dots (3)$$

ここで κ はポアソン比 ν によって平面応力状態で $(3-\nu)/(1+\nu)$ 、平面ひずみ状態で $3-4\nu$ と表され、 p_x, p_y は境界上に作用する x, y 方向の外力、 ds は境界上の線素を表す。 u, v は x, y 方向の変位、 G はせん断弾性係数、 σ は単位円上の ζ である。また剛境界の解析接続の原理より $\psi(\zeta)$ は次式で与えられる。

$$\psi(\zeta) = \kappa \phi(1/\bar{\zeta}) - \frac{\omega(1/\bar{\zeta})}{\omega(\zeta)} \phi'(\zeta) \quad \dots\dots (4)$$

次に解析形状に y 軸方向一様引張り荷重を与えたときの複素応力関数を導く、まず変位境界(L境界と呼ぶ)、S.S.境界(M境界と呼ぶ)の境界条件として、次の条件を与える。

$$\begin{aligned} 2G(u + iv) &= 0 & \text{on } L_1, L_2 \\ p_x &= 0 \text{ かつ } v = 0 & \text{on } M_1 \\ p_x &= C_1 \text{ かつ } v = 0 & \text{on } M_2 \end{aligned} \quad \dots\dots (5-a, b, c)$$

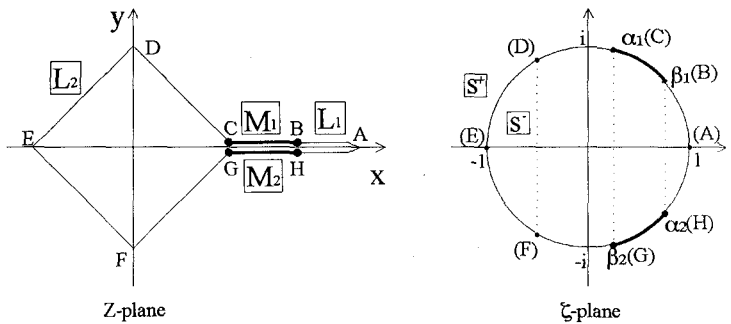


図-1 x軸に対称な2連結形状と、それに対応する単位円

C_1 は未定の定数で、このとき図-1に示す対称な2コの変位境界（ L_1, L_2 ）内が剛な介在物となる無限板の境界条件になる（図-2参照）。

一様引張を受ける複素応力関数を、次式の形で与える。

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta) + \phi_2(\zeta) \quad \phi_1(\zeta) = \frac{p}{4} \omega(\zeta) \quad \dots\dots (6)$$

$$\psi(\zeta) = \psi_1(\zeta) + \psi_2(\zeta) \quad \psi_1(\zeta) = \frac{p}{2} \omega(\zeta) \quad \dots\dots (7)$$

ここで $\phi_1(\zeta), \psi_1(\zeta)$ は、無限遠での応力状態を表す。

式 (5-a,b,c), (6), (7) より、複素応力関数 $\phi_2(\zeta)$ を用いて L, M 上での境界条件式を次式に示す。

$$\begin{aligned} \phi_2^+(\sigma) - \phi_2^-(\sigma) &= 0 && \text{on } L_1, L_2 \\ \phi_2^+(\sigma) + \phi_2^-(\sigma) &= \begin{cases} R(\sigma) & \text{on } M_1 \\ \frac{2C_1}{\kappa+1} + R(\sigma) & \text{on } M_2 \end{cases} && \dots\dots (8-a,b,c) \end{aligned}$$

ただし肩符の+, -は、 ζ が単位円に単位円外(s^*)および、単位円内(s^-)から近づいたときの $\phi_2(\zeta)$ のそれぞれの値を示す。 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ を含んだPlemelj関数を次式に与える。

$$\chi(\zeta) = (\zeta - \alpha_1)^{\alpha_1} (\zeta - \beta_1)^{\alpha_1} (\zeta - \alpha_2)^{\alpha_2} (\zeta - \beta_2)^{\alpha_2} \quad \dots\dots (9)$$

$$\text{ここで } \chi^+(\sigma) = \chi^-(\sigma) \quad \text{on } L_1, L_2 \quad \dots\dots (10)$$

$$-\chi^+(\sigma) = \chi^-(\sigma) \quad \text{on } M_1, M_2$$

$\phi_2(\zeta)$ の一般解は、領域 s^* （単位円外）で正則となるよう式(8-a,b,c)のRiemann-Hilbert問題を解くことにより得られ、次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_2(\zeta) &= \frac{\chi(\zeta)}{2\pi i} \int_{M_2} \frac{\frac{2C_1}{\kappa+1} d\sigma}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} + \frac{1}{2} \sum \left\{ 1 + \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right\} \frac{\frac{1}{\kappa} \left\{ (1-\kappa) \frac{p}{4} E_k + \overline{A_k} B_k \right\}}{\zeta_k - \zeta} + \frac{1}{2} \sum \left\{ 1 - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \right\} \frac{-\frac{1}{\kappa} \left\{ (1-\kappa) \frac{p}{4} \overline{E_k} + A_k \overline{B_k} \right\} \zeta_k^{-2}}{\zeta_k' - \zeta} \\ &+ \frac{p}{4\kappa} \left\{ E_0 \zeta + \overline{E_0} \frac{1}{\zeta} + \frac{\overline{E_0}}{\chi(0)} \frac{\chi(\zeta)}{\zeta} \right\} - \frac{1}{2\kappa} \sum \left\{ (1-\kappa) \frac{p}{4} E_k + \overline{A_k} B_k \right\} \zeta_k' \\ &\text{ただし } A_k = \phi'(\zeta_k'), B_k = \frac{E_k}{\omega(\zeta_k')}, \zeta_k' = \frac{1}{\zeta_k} \end{aligned} \quad \dots\dots (11)$$

ここで得られた複素応力関数の一般解を用いた解析例として、図-2に応力分布を示す。

[3 まとめ] 対称な2重連結形状の変位境界値問題として、 x 軸に対称な2つの剛介在物を有する形状の複素応力関数の一般解を得た。解析例として y 軸方向一様引張荷重が作用したときの、応力分布を求めた。この解を用いて介在物の干渉等を、調べることができる。

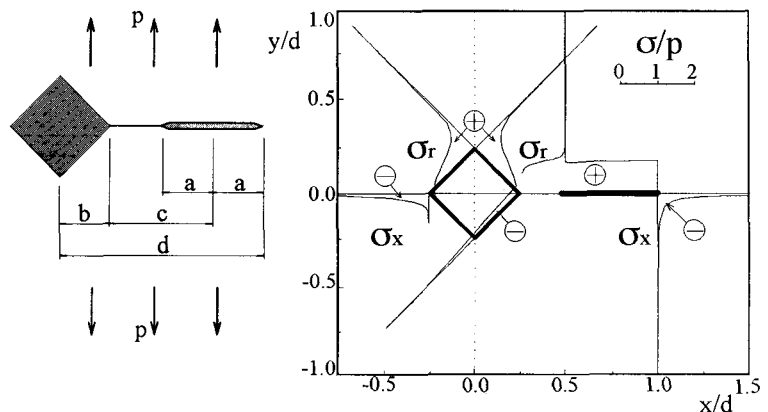


図-2 応力分布図($b/d=0.25, a/d=0.25, c/d=0.5$)

[参考文献]

[1] Hasebe et al. Archive of Applied Mechanics (in print)

[2] Hasebe et al.(1989), J.Engrg.Mech., ASCE 115-12, 2738-2748