

北見工業大学大学院 学生員 小熊善明

北見工業大学 正員 奥村 勇

1. まえがき 厚板の曲げ解析における研究は、厚板理論による研究と3次元弾性論によるものとに大別される。厚板理論を用いる場合には、板厚が小さいものから中程度の大きさのものまで解析が可能であり、解析方法および計算が簡略であるなどの利点がある。しかしその反面、この理論は境界条件を厳密に規定し得ないことに起因して、解析結果が近似的にならざるをえないという短所を有している。特に板厚が大きい場合には、3次元弾性論による解析は、前述の厚板理論に比較して、境界条件を変位成分あるいは応力成分により厳密に規定できるため、より精密な解析が可能である。

本研究は、3次元弾性論の基本解として、一般化されたBoussinesqの解を用い、上面中央部に部分等分布荷重を受ける周辺固定長方形厚板の曲げを3次元弾性論により解析し、その応力特性を明らかにするものである。

2. 3次元弾性解 3次元弾性解として、一般化されたBoussinesqの解を用いると、変位成分 u, v および w は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} 2Gu &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_0 + x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3 \right) - 4(1-\nu)\lambda_1 + 2 \left(\frac{\partial \lambda_3}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} \right) \\ 2Gv &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_0 + x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3 \right) - 4(1-\nu)\lambda_2 + 2 \left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial \lambda_3}{\partial x} \right) \\ 2Gw &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_0 + x\lambda_1 + y\lambda_2 + z\lambda_3 \right) - 4(1-\nu)\lambda_3 + 2 \left(\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} \right) \dots (1) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \lambda_0 &= 0, \quad \nabla^2 \lambda_1 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_2 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_3 = 0; \\ \nabla^2 \lambda_1 &= 0, \quad \nabla^2 \lambda_2 = 0, \quad \nabla^2 \lambda_3 = 0 \dots (2) \end{aligned}$$

また、 G および ν は、それぞれ、材料のせん断弾性係数およびポアソン比を表す。図-1に示すように、応力場が x および y に関して偶であることに留意して、式(2)を解くと、変位ポテンシャルが次式のように求められる。

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{ks}^{(1)} \cos \gamma_k z \cos \beta_s y \cosh l_{ks} x + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} B_{kr}^{(1)} \cos \gamma_k z \cos \alpha_r x \cosh m_{kr} y \\ &\quad + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(1)} \cosh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(1)} \sinh n_{rs} z) \\ \lambda_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{ks}^{(2)} \cos \gamma_k z \cos \beta_s y \sinh l_{ks} x; \quad \lambda_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} B_{kr}^{(2)} \cos \gamma_k z \cos \alpha_r x \sinh m_{kr} y \\ \lambda_3 &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \cos \alpha_r x \cos \beta_s y (C_{rs}^{(2)} \sinh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(2)} \cosh n_{rs} z) \\ \lambda_1 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} A_{ks}^{(3)} \sin \gamma_k z \sin \beta_s y \cosh l_{ks} x; \quad \lambda_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} B_{kr}^{(3)} \sin \gamma_k z \sin \alpha_r x \cosh m_{kr} y \\ \lambda_3 &= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \sin \alpha_r x \sin \beta_s y (C_{rs}^{(3)} \cosh n_{rs} z + \bar{C}_{rs}^{(3)} \sinh n_{rs} z) \end{aligned}$$

ここで、 $A_{ks}^{(1)}, \dots, \bar{C}_{rs}^{(3)}$ などは、境界条件によって決定されるべき未定係数であり、また、

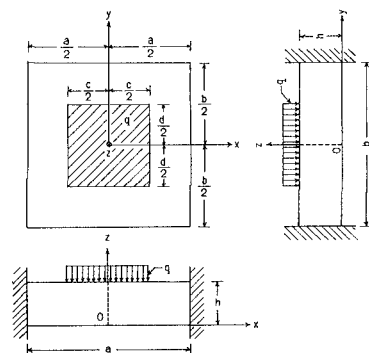


図-1 周辺固定長方形厚板の座標系

$$\alpha_r = \frac{r\pi}{a} \quad [r=1, 3, 5 \dots], \quad \beta_s = \frac{s\pi}{b} \quad [s=1, 3, 5 \dots], \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{h} \quad [k=0, 1, 2 \dots]$$

$$l_{ks} = \sqrt{\gamma_k^2 + \beta_s^2}, \quad m_{kr} = \sqrt{\gamma_k^2 + \alpha_r^2}, \quad n_{rs} = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_s^2}$$

3.境界条件 境界条件として、全周辺固定の長方形厚板が、上面に部分等分布荷重を受け、下面が自由の場合を考えると、境界条件は次式で表される。

$$x = \pm a/2 \text{ において、} u=0, v=0, w=0 \quad ; \quad y = \pm b/2 \text{ において、} u=0, v=0, w=0$$

$$z = h \text{ において、} \sigma_{xx}=0, \sigma_{xy}=0, \sigma_{xz} = -p(x, y)$$

$$z = 0 \text{ において、} \sigma_{xx}=0, \sigma_{xy}=0, \sigma_{xz}=0$$

ここで、 $p(x, y)$ は、上面に作用する部分等分布荷重である。

4. 4群の連立1次方程式 数式の上で厳密に満足できない境界条件から、最終的に次式を得る。

$(u)_{x=\pm a/2} = 0$ から、

$$A_{ks}^{(2)} \left\{ (3-4\nu) \sinh \xi_{ks} - \frac{\xi_{ks}}{\cosh \xi_{ks}} \right\} - \sum_{r=1}^{\infty} B_{kr}^{(2)} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{\alpha_r}{2} {}_rE_{ks}^{(1)} + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\alpha_r}{n_{rs}} (-1)^{\frac{r-1}{2}} \left(C_{rs}^{(2)} {}_rF_{sk}^{(1)} + \bar{C}_{rs}^{(2)} {}_rF_{sk}^{(2)} \right) = 0$$

ここで、

$${}_rE_{ks}^{(1)} = \frac{16}{b} \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}} \beta_s m_{kr}}{(m_{kr}^2 + \beta_s^2)^2} \cosh \eta_{kr}, \quad {}_rF_{sk}^{(1)} = \frac{4}{h} \frac{(-1)^k \varepsilon_k n_{rs}}{n_{rs}^2 + \gamma_k^2} \left(\frac{\gamma_k^2}{n_{rs}^2 + \gamma_k^2} - \nu \right) \sinh \zeta_{rs}$$

$${}_rF_{sk}^{(2)} = \frac{4}{h} \frac{\varepsilon_k n_{rs}}{n_{rs}^2 + \gamma_k^2} \left(\frac{\gamma_k^2}{n_{rs}^2 + \gamma_k^2} - \nu \right) \{ (-1)^k \cosh \zeta_{rs} - 1 \}, \quad \varepsilon_k = \begin{cases} 1/2 & [k=0] \\ 1 & [k \geq 1] \end{cases}, \quad \xi_{ks} = \frac{l_{ks} a}{2}$$

$(v)_{y=\pm b/2} = 0$ から、

$$B_{kr}^{(2)} \left\{ (3-4\nu) \sinh \eta_{kr} - \frac{\eta_{kr}}{\cosh \eta_{kr}} \right\} - \sum_{s=1}^{\infty} A_{ks}^{(2)} (-1)^{\frac{s-1}{2}} \frac{\beta_s}{2} {}_sD_{kr}^{(1)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_s}{n_{rs}} (-1)^{\frac{s-1}{2}} \left(C_{rs}^{(2)} {}_sF_{sk}^{(1)} + \bar{C}_{rs}^{(2)} {}_sF_{sk}^{(2)} \right) = 0$$

ここで、

$${}_sD_{kr}^{(1)} = \frac{16}{a} \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}} \alpha_r l_{ks}}{(l_{ks}^2 + \alpha_r^2)^2} \cosh \xi_{ks}, \quad {}_sF_{rk}^{(1)} = {}_rF_{sk}^{(1)}, \quad {}_sF_{rk}^{(2)} = {}_rF_{sk}^{(2)}, \quad \eta_{kr} = \frac{m_{kr} b}{2}$$

$(\sigma_{xx})_{z=h} = -p(x, y)$ から、

$$n_{rs} \left\{ C_{rs}^{(2)} \left(\cosh \zeta_{rs} + \frac{\zeta_{rs}}{\sinh \zeta_{rs}} \right) + \bar{C}_{rs}^{(2)} \sinh \zeta_{rs} \right\} - \sum_{k=0}^{\infty} A_{ks}^{(2)} (-1)^k {}_kD_{sr}^{(2)} - \sum_{k=0}^{\infty} B_{kr}^{(2)} (-1)^k {}_kE_{rs}^{(2)} = e_{rs}$$

ここで、

$${}_kD_{sr}^{(2)} = \frac{8}{a} \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}} \alpha_r l_{ks}}{l_{ks}^2 + \alpha_r^2} \left(\frac{\gamma_k^2}{l_{ks}^2 + \alpha_r^2} - \nu \right) \cosh \xi_{ks}, \quad {}_kE_{rs}^{(2)} = \frac{8}{b} \frac{(-1)^{\frac{s-1}{2}} \beta_s m_{kr}}{m_{kr}^2 + \beta_s^2} \left(\frac{\gamma_k^2}{m_{kr}^2 + \beta_s^2} - \nu \right) \cosh \eta_{kr}$$

$$e_{rs} = \frac{16q}{\pi^2} \frac{1}{rs} \sin \frac{r\pi c}{2a} \sin \frac{s\pi d}{2b}, \quad \zeta_{rs} = n_{rs} h$$

$(\sigma_{xx})_{z=0} = 0$ から、

$$n_{rs} \left\{ C_{rs}^{(2)} (1 + \zeta_{rs} \coth \zeta_{rs}) + \bar{C}_{rs}^{(2)} \zeta_{rs} \right\} - \sum_{k=0}^{\infty} A_{ks}^{(2)} {}_kD_{sr}^{(2)} - \sum_{k=0}^{\infty} B_{kr}^{(2)} {}_kE_{rs}^{(2)} = 0$$

ここで、 ${}_kD_{sr}^{(2)}$ および ${}_kE_{rs}^{(2)}$ は、既に表示したものである。

5. あとがき 3次元弾性論による周辺固定長方形厚板の曲げ解析の解法について述べた。この解析による計算結果は、講演会当日発表する予定である。3次元弾性論による解法では、単純支持、自由あるいは固定の境界条件が、3次元的に厳密に規定されるため、周辺あるいは周辺近くの変位及び応力の値が正確に算出できるという大きな利点がある。この3次元弾性論による解析結果と厚板理論による結果とを比較することにより、厚板の境界条件として一般的に用いられている近似境界条件の精密性の検討ができ、これについても、講演会当日発表する。