

I - 281

面内および面外荷重下の楕円形の弾性介在物を
有する粘弾性体の応力、変位解析

山梨大学大学院 学生員○柴田 善央
山梨大学工学部 正 員 平島 健一
群馬高専土木科 正 員 木村 清和

1. はじめに

各種の介在物を有する粘弾性体に対する研究は従来から行われている。著者らは、先に面内および面外荷重下での円形・楕円形の空孔を有する線形粘弾性体の応力、変位を求めるための解析理論を提示してきたが、(1),(2)ここでは孔境界として、自由境界および固定(剛体)境界の2つの場合を対象とした理論構成であった。

本論文ではその結果を拡張して、図1に示すような奥行き方向に対して形状変化のない一定断面の円形ないし楕円形の弾性の介在物が存在する場合の粘弾性媒体問題を対象とし、荷重としては楕円形境界の長・短軸径に比べて十分遠方から面内荷重(*i.e.* $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$) および面外荷重(*i.e.* $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$) が作用する場合に対する閉じた型の弾性厳密解および粘弾性問題に対する対応原理を適用して、同様の閉じた型の解析解を求める。

2. 解析理論

2.1 楕円形の弾性介在物を有する等方性弾性体問題の
基礎式と基本解

境界 L の外部(媒体: Matrix 側)および内部(介在物: Inclusion 側)の領域を、それぞれ下添字 M および I を付して区別する。

無限遠から一様応力 $\sigma_x^\infty, \sigma_y^\infty, \tau_{xy}^\infty$ が作用する場合、最終的に次式のようにになる。

(媒体側):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi^{(1)} + \sigma_\eta^{(1)} + i \frac{8G_M}{\kappa_M + 1} \bar{\omega}^{(1)} &= 4 \left\{ A_1 + \bar{B}_1 \frac{\bar{\omega}'(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} \\ \sigma_\xi^{(1)} - i \tau_{\xi\eta}^{(1)} &= 2Re \left\{ A_1 + \bar{B}_1 \frac{\bar{\omega}'(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} \\ &\quad - \left[B_0 + \bar{B}_1 \frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{\bar{\omega}'(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\bar{B}_1}{\omega'(\zeta)} \frac{d}{d\zeta} \left\{ \frac{\bar{\omega}'(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \bar{\omega}(1/\zeta) \right\} + A_2 \frac{\bar{\omega}'(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] e^{2i\phi}, \\ u_\xi^{(1)} - i u_\eta^{(1)} &= \frac{1}{2G_1} \left[\kappa_M \left\{ \bar{A}_1 \bar{\omega}(\zeta) + B_1 \omega(1/\zeta) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \bar{\omega}(\zeta) \left\{ A_1 + \bar{B}_1 \frac{\bar{\omega}'(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ B_0 \omega(\zeta) + A_2 \bar{\omega}(1/\zeta) + \bar{B}_1 \frac{\bar{\omega}(1/\zeta) \cdot \bar{\omega}'(1/\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\} \right] e^{i\phi}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

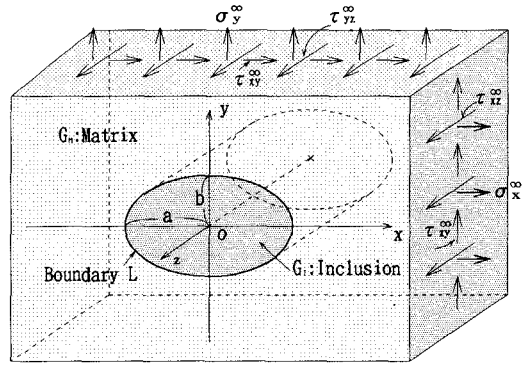


図1 問題の幾何形状と作用荷重.

(介在物側):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\xi^{(2)} + \sigma_\eta^{(2)} + i \frac{8G_I}{\kappa_I + 1} \bar{\omega}^{(2)} &= 4 \delta_{r\infty} \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} A_0, \\ \sigma_\xi^{(2)} - i \tau_{\xi\eta}^{(2)} &= \delta_{r\infty} \left[2Re \left\{ \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} A_0 \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{2i\phi} \left\{ \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} B_0 \right\} \right], \\ u_\xi^{(2)} - i u_\eta^{(2)} &= \frac{\delta_{r\infty}}{2G_I} e^{i\phi} \left\{ \omega(\zeta) \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} (\kappa_I \bar{A}_0 - A_0) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} B_0 \omega(\zeta) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

無限遠に一様な面外せん断応力 $\tau_{xz}^\infty, \tau_{yz}^\infty$ が作用する場合、最終的に次式のようにになる。

(媒体側):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\xi z}^{(1)} - i \tau_{\eta z}^{(1)} &= (\tau_{xz}^{(1)} - i \tau_{yz}^{(1)}) e^{i\phi} \\ &= \left\{ C_0 - K \bar{C}_0 \frac{m \zeta^2 - 1}{\zeta^2 - m} \right\} e^{i\phi}, \\ G_M u_z^{(1)} &= Re [C_0 \omega(\zeta) - K \bar{C}_0 \bar{\omega}(1/\zeta)] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(介在物側):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\xi z}^{(2)} - i \tau_{\eta z}^{(2)} &= (\tau_{xz}^{(2)} - i \tau_{yz}^{(2)}) e^{i\phi} = \delta_{r\infty} (1 + K) C_0 e^{i\phi}, \\ G_I u_z^{(2)} &= \delta_{r\infty} (1 + K) Re [C_0 \omega(\zeta)]. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 $\omega(\eta)$ は写像関数であり、 κ_k は平面ひずみ状態のとき $\kappa_k = 3 - 4\nu_k$ とする。また、 E_k, ν_k および G_k はそれぞれ弾性係数、ポアソン比およびせん断弾性係数である。 A_k, B_k ($k = 0, 1, 2$), C_0, α, β はそれらの組合せ

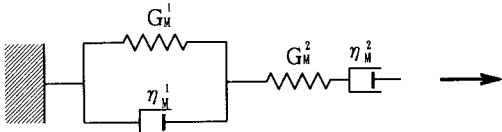


図2 粘弾性媒体の偏差応力成分に対するBurgersモデル.

定数である。また、カッコ付きの上添字の k については $k = 1$ のとき媒体、 $k = 2$ のとき介在物を表すものとする。

2.2 楕円形の弾性介在物を有する等方性粘弾性体問題の基礎式と基本解

媒体側の粘弾性体モデルとして、応力のうちの偏差成分に関しては図2に示すようなBurgersモデルを、また体積成分に関してはElasticモデルを採用するものとする⁽¹⁾。以下、そのモデルをBurgers-Elasticモデルと呼ぶこととする。

ここで、線形粘弾性体に対する対応原理によって、前節で示した弾性体問題に対する解析解が、対象とする粘弾性体におけるLaplace変換解となる。したがって、式(1)~(4)中の定数 G_M , λ_M , K_M , E_M , ν_M に関連した組み合わせ定数に対し、Laplace変換された定数を全て求めそれらのLaplace逆変換したものを代入整理すれば、閉じた型の粘弾性解を求めることができる。

3. 数値計算例

前節の結果を用いた数値計算例の一例を示す。粘弾性媒体の材料定数は、Goodmanの著書⁽³⁾で採用されている岩塩を対象として、Burgersモデルに対し、次のような値をとるものとする。

$$\left. \begin{aligned} G_M^1 &= 2.07 \text{ GPa}, & \eta_M^1 &= 4.83 \times 10^3 \text{ GPa} \cdot \text{min}, \\ G_M^2 &= 6.90 \text{ GPa}, & \eta_M^2 &= 5.73 \times 10^5 \text{ GPa} \cdot \text{min}, \\ K_M &= 5.52 \text{ GPa}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

図3は面内荷重 σ_y^∞ が作用した場合の境界での変形を示したものである。空洞の場合と比較して、変形量は小さく、その影響が現れた結果となっている。図4は面外荷重 τ_{yz}^∞ が作用した場合の弾性介在物内の応力について示したものである。このとき応力は位置に関係なく一様になっている。

4. おわりに

本論文は面内および面外荷重下での円形・楕円形の弾性介在物を有する粘弾性媒体問題に対し、閉じた型の

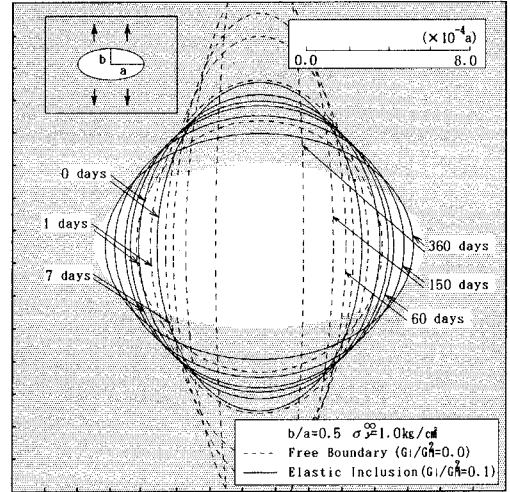


図3 各種の面内荷重が作用する場合の楕円形介在物の形状変化、 σ_y^∞ 作用。

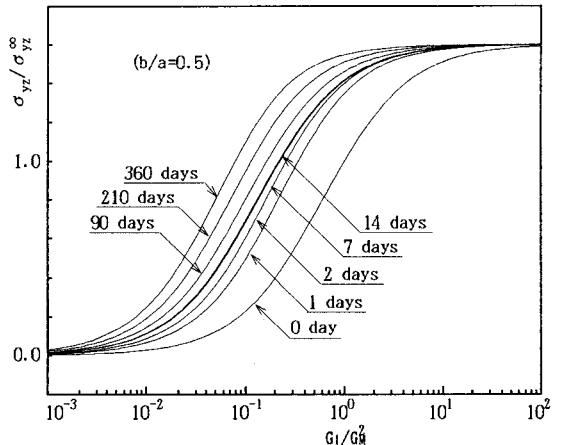


図4 各種の荷重が作用する場合の弾性介在物内の応力状態、 $\tau_{yz}^{(2)}(\tau_{yz}^\infty)$ 作用。

解析解を求めた。媒体の粘弾性モデルとして、Burgers-Elasticモデルを採用したが、その定数を特殊化することによりStandard-Elasticモデル、Kelvin-Rigidモデルなどの縮退させた各種粘弾性モデルについても求められる汎用性のある定式化となっている。

参考文献

- (1) 平島健一・熊坂博夫・桜井英行・柴田善央：土木学会論文集 No.475/III-24, (1993), 29.
- (2) 平島健一・熊坂博夫・三谷泰浩・柴田善央：土木学会論文集 No.475/III-24, (1993), 143.
- (3) Goodman, RE : Introduction to Rock Mechanics, Second Edition,