

## I-73 補剛材が全長には配置されていない補剛板の弾性座屈荷重

武蔵工業大学 ○学生会員 高橋 実

武蔵工業大学 正 会 員 西脇威夫

武蔵工業大学 正 会 員 増田陳紀

1. はじめに: 補剛材が全長に配置されている補剛板の弾性座屈荷重に関する研究はすでに数多く行われているが, 補剛材が全長には配置されていない補剛板の弾性座屈荷重に関する研究は理論解析的な検討が困難なためかその例がほとんどない. 本報告は後者の研究を進めるために著者らが既に提案した一つの解法<sup>1)</sup>の理論的根拠を示し, 具体的な計算を通して種々の補剛板の座屈解析への適合性を示すものである. 以下, 弾性座屈荷重を単に座屈荷重と称する.

2. 座屈荷重の計算方法<sup>1)</sup>: 座屈荷重の計算方法は, 初期変形のある構造要素の幾何学的非線形 FEM 解析と座屈実験より座屈荷重を求める Southwell の提案した方法<sup>2)</sup>とを組み合わせたものであり, 座屈荷重計算と座屈モード計算との2段階の計算過程から構成される<sup>1)</sup>.

(1) 座屈荷重計算過程: もし正確な座屈モードを初期変形モードに用いるならば, 荷重が小さくて荷重-たわみ関係がほとんど線形関係である区間に Southwell の方法を用いることができる<sup>2)</sup>. 荷重-たわみ関係は幾何学的非線形 FEM 解析によって求める.

(2) 座屈モード計算過程: (1) で使用する正確な座屈モードを求めるための過程であり, 初期変形のある板の幾何学的非線形 FEM 解析によって求める. 載荷する荷重を十分に座屈荷重に近づけなくても, 載荷計算を繰り返すことによって変形モードが座屈モードに収束することを利用する. この利点は, 予想される座屈荷重の精度が劣る場合には載荷荷重を十分小さくすればよい点, 高次の座屈モードを求めてしまわない点, 座屈後変形が求めようとする座屈モードに影響を及ぼさない点などである. 簡単のために図-1 の一様圧縮を受ける周辺単純支持無補剛板を例に取り, このことを理論的に示す. 板の追加たわみ  $w_1$  は式(1)の微分方程式から定められる. 初期たわみ  $w_0$ <sup>(1)</sup> が式(2-1)であるとする, 追加たわみ  $w_1$ <sup>(1)</sup> は式(1)より式(2-2)のようになる.  $0 \leq \alpha < 1$  に対して式(2-2)の係数  $C_{mn}$  のうち最大のものは  $C_{11}$  となる. 式(2-2)を  $C_{11}$  で除し, これを新たに初期たわみ  $w_0$ <sup>(2)</sup> と置き, 同様に追加たわみ  $w_1$ <sup>(2)</sup> を求める. この操作を  $r$  回繰り返した後の初期たわみ  $w_0$ <sup>(r)</sup> は式(5)のようになる.  $C_{11}$  は他のどの  $C_{mn}$  よりも大きいので  $C_{mn}/C_{11} \leq 1$  となり, 載荷を  $r$  回繰り返すならば  $\alpha$  を十分に 1 に近づけなくても,  $(m, n) = (1, 1)$  の項がそのほかのどの項よりも一番有力な項となり, 式(5)は式(6)に限りなく近づく. 式(6)がこの板の座屈モードを表している.

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = \frac{N_x}{D} \frac{\partial^2 (w_0 + w_1)}{\partial x^2} \quad \dots(1)$$

$$w_0^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \dots(2-1)$$

$$w_1^{(1)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \dots(2-2)$$

ここに,

$$C_{mn} = \frac{\alpha}{\beta_{mn} - \alpha}, \quad \alpha = \frac{N_x}{N_{x,cr}}, \quad N_{x,cr} = D \left( \frac{\pi}{a} + \frac{\pi}{b^2} \right)^2 \quad \dots(3)$$

$$\beta_{mn} = \begin{cases} m^2 & (m=n) \\ \left( m \frac{b}{a} + \frac{n^2}{m} \frac{a}{b} \right)^2 / \left( \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)^2 & (m \neq n) \end{cases} \quad \dots(4)$$

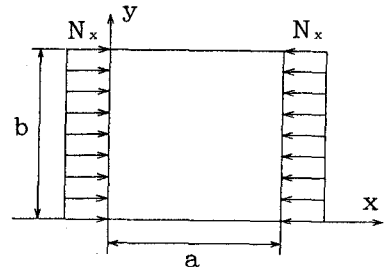
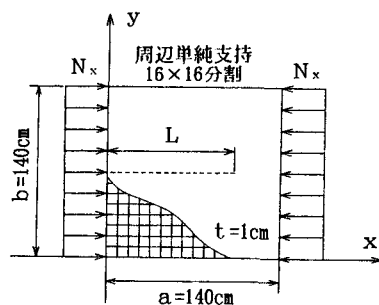


図-1 周辺単純支持無補剛板

$$w_0^{(r)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{C_{mn}}{C_{11}} \right)^r A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \dots(5)$$

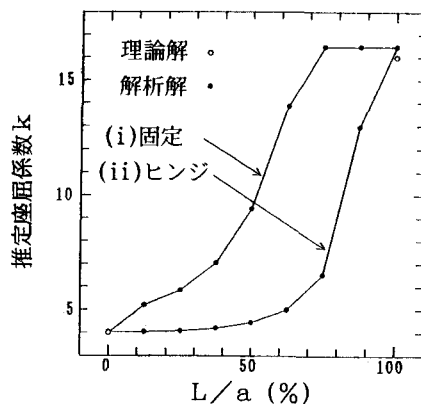
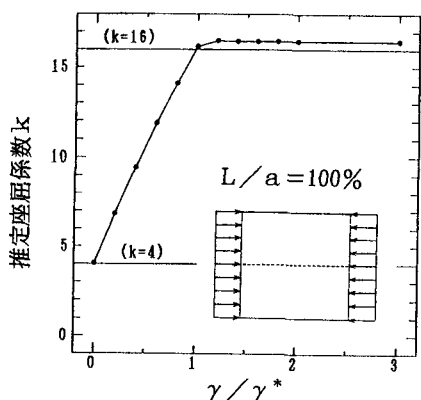
$$w_0^{(r)} = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad \dots(6)$$

3. 解析例と計算方法の妥当性の検証: 解析対象は図-2に示すような縦補剛材(点線で示す)を持ち一方に様に圧縮される周辺単純支持正方形板である。縦補剛材の $x=0$ における $y$ 軸回りの境界条件を(i)固定と(ii)ヒンジにした2通りを考える。板パネル長を $a$ , 補剛材の長さを載荷辺から $L$ とすると,  $L/a$ が0%と100%の場合の理論解は既知である。縦補剛材長は $L/a$ が0, 12.5, 25, 37.5, 50, 62.5, 75, 87.5, 100%の場合を取り上げる。幾何学的非線形FEM解析法は, 応力仮定のハイブリッド法に基づいて定式化された1節点6自由度の三角形薄板要素を用いた座標表示による離散化要素解析法<sup>3)</sup>の増分型を用い, 増分制御方法は荷重制御法を用いる。 $L/a$ が100%の補剛板から計算を開始し,  $L/a$ が減少する方向に順次計算する<sup>1)</sup>。 $L/a=100%$ の補剛板の最初の座屈モード計算における初期変形モードは, 理論座屈モードを用い, それ以外の $L/a$ の補剛板の座屈モード計算の初期たわみモードには, 一つ前の $L/a$ の値の補剛板の座屈モード計算に置いて最終的に得られた変形モード(座屈モード)を順次用いる。補剛板の初期変形の大きさはその最大値が板厚 $t$ の $1/1000$ となるようにし, また, 収束判定基準としての不釣り合い力ノルムは一荷重増分に対して5%とする。図-3に $L/a$ と推定座屈係数 $k$ の関係を示す。一連の計算で最後に得られる $L/a=0%$ に対する推定座屈係数は理論解と一致しており, 本計算方法の妥当性が明らかである。なお,  $L/a=100%$ に対する解析解の理論解との相対誤差は2.8%であり, 要素分割数が $L/a=0%$ に比べて相対的に少ないことによるものである。 $L/a$ が100%の補剛板については縦補剛材の剛比 $\gamma$ を変化させた場合の座屈係数を同様に求めた。 $\gamma$ が0の補剛板から計算を開始し,  $\gamma$ が増加する方向に順次計算する。図-4に限界剛比 $\gamma^*$ に対する剛比 $\gamma$ と推定座屈係数 $k$ の関係を示す。剛比が限界剛比以上の場合に推定座屈係数は理論解 $k=16$ とほぼ一致しており(相対誤差2.9%), 本計算方法の妥当性が明らかである。



$$\begin{aligned} \text{辺長比 } \frac{a}{b} &= 1 & \text{補剛材の剛比 } \gamma &= \infty \\ \text{幅厚比 } \frac{b}{t} &= 140 & \text{断面積比 } \delta &= 0 \end{aligned}$$

図-2 解析対象と解析モデル

図-3  $L/a$ と推定座屈係数 $k$ 図-4  $\gamma/\gamma^*$ と推定座屈係数 $k$ 

4. おわりに: 本計算方法によれば, 大きな計算量を必要とする通常の固有値計算を用いずに座屈変形モードである固有ベクトルと座屈荷重である固有値とを求めることができる。この方法は他の問題にも適用可能な方法と思われる。今後は, Rayleigh商を用いるなどして計算の効率化を更に図るとともに, より複雑な荷重条件・補剛材配置の補剛板の座屈荷重や, 非載荷辺の剛性が座屈荷重へ及ぼす影響についての検討を行う予定である。

参考文献: 1) 西脇威夫・増田陳紀・高橋 実: 補剛材が全長には配置されていない補剛板の弾性座屈荷重計算法, 土木学会第21回関東支部技術研究発表会, I-18, 1994年3月。2) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: Theory of Elastic Stability, Second Edition, pp.31-33, pp.190-192 and pp.344-346, McGraw-Hill, 1961。3) 吉田 裕・増田陳紀・松田 隆: 薄板で構成される立体構造の弾塑性・大変位離散化要素解析法, 土木学会論文報告集, 第288号, pp.41-55, 1979年8月。