I－15 厚い円筒殻の自由振動解析

北海道大学工学部 正員 三上 隆
三井建設（株） 正員 三上 浩
北海道大学工学部 正員 佐伯 昇
釧路工業高等専門学校 正員 芳村 仁

１．はじめに

厚い円筒殻（円筒体）の自由振動解析の研究は極めて少ないようである。例えば,Armenakasらは両端単純支持された円筒体構造の解析解を求め、Gladwellらは３節点三辺形断面軸対称体要素を用いて自由一自由の条件に対して有限要素法により解析を行っている。またHutchinsonらは級数解法を採用し自由一自由の円筒体の解を求め、Banerjeeらは境界要素法(BEM)を円筒、ドーム、双曲形状の回転体の自由振動解析に適用している。またBoresiらは分割法を円筒、双曲形状の回転体の解析に用いている。本報告は、変位（経線、法線および円周方向）成分を厚さ方向座標のべき級数で表示し、変位成分のみで表された運動方程式を選点法で離散化し解析する一近似解析法を提示する。

２．基本方程式と解析手法

基本方程式の誘導に当たって、回転体の厚さをhで表し、一定と仮定する。

デカルト座標(X,Y,Z)と曲線座標(x,y)との関係が次式で成り立つ。

$$X=X(x,y),\quad Y=Y(x,y),\quad Z=Z(x,y) \qquad \cdots(1)$$

曲面上の近接する２点(X,Y)と$(x+dx,y+dy)$を結ぶ線素の長さdsを近似的に次式で表す。

$$ds^2=A^2dx^2+B^2dy^2 \qquad \cdots(2)$$

Lameの定数(α,β)と局面の主曲率半径(R_1,R_2)の間には次式が成立する。

$$\alpha=A(1-z/R_1),\quad \beta=B(1-z/R_2) \qquad \cdots(3)$$

ここで、A,Bは曲線座標(X,Y)の関数であり、$R_1=R_1(x,y),\ R_2=R_2(x,y)$である。

歪み成分には次式を採用する。

$$\varepsilon_x=u_{,x}/\alpha+\alpha_{,z}W/\alpha\ ,\quad \varepsilon_y=v_{,y}/\beta+\beta_{,x}W/\beta+\beta_{,x}u/(\alpha\beta)\ ,\quad \varepsilon_z=W_{,z}$$

$$\gamma_{yz}=v_{,z}+W_{,y}/\beta-\beta_{,z}v/\beta\ ,\quad \gamma_{xz}=W_{,x}/\alpha+u_{,z}-\alpha_{,z}u/\alpha\ ,\quad \gamma_{xy}=u_{,y}/\beta+v_{,x}/\alpha-\beta_{,x}v/(\alpha\beta) \qquad \cdots(4)$$

ここで、(u,v,w)は(x,y,z)方向の変位成分であり、コンマ（, ）の後の添字は偏微分を表す。

変位成分を次のようにｚに関する多項式で表す。

$$u=u_0+u_1z+u_2z^2+\ldots..+u_Kz^K=\sum u_nz^n \qquad (n=0,1,\ldots\ldots,K) \qquad \cdots(5.a)$$

$$v=v_0+v_1z+v_2z^2+\ldots..+v_Kz^K=\sum v_nz^n \qquad (n=0,1,\ldots\ldots,K) \qquad \cdots(5.b)$$

$$w=w_0+w_1z+w_2z^2+\ldots..+w_Kz^K=\sum w_nz^n \qquad (n=0,1,\ldots\ldots,K) \qquad \cdots(5.c)$$

ここで、$(u_0,u_1,\ldots,u_k),(v_0,v_1,\ldots,v_k)$および$(w_0,w_1,\ldots,w_k)$はx,yおよび時間tの関数である。

応力成分$(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{xz},\tau_{xy})$とひずみの関係式は以下となる。

$$\sigma_x=c_{11}\varepsilon_x+c_{12}\varepsilon_y+c_{13}\varepsilon_z\ ,\quad \sigma_y=c_{12}\varepsilon_x+c_{22}\varepsilon_y+c_{23}\varepsilon_z\ ,\quad \sigma_z=c_{13}\varepsilon_x+c_{23}\varepsilon_y+c_{33}\varepsilon_z \qquad \cdots(6.a)$$

$$\tau_{yz}=c_{44}\gamma_{yz}\ ,\quad \tau_{xz}=c_{55}\gamma_{xz}\ ,\quad \tau_{xy}=c_{66}\gamma_{xy} \qquad \cdots(6.b)$$

ここで、$c_{11}\sim c_{66}$は弾性係数、ポアソン比等で表される係数である。

ひずみエネルギーの第一変分は次式となる。

$$\delta U=\iiint(\sigma_x\delta\varepsilon_x+\sigma_y\delta\varepsilon_y+\sigma_z\delta\varepsilon_z+\tau_{yz}\delta\gamma_{yz}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz}+\tau_{xy}\delta\gamma_{xy})\alpha\beta\,dxdydz \qquad \cdots(6)$$

式(4)および(5)を式(6)に代入すれば次式が得られる。

$$\delta U=\iint[BR_x^{(n)}\delta u_{,x}+B\alpha_{,z}R_x^{(n)}\delta w+AR_y^{(n)}\delta v_{,y}+B_{,x}R_y^{(n)}\delta u+A\beta_{,z}R_y^{(n)}\delta w+nABT^{(n-1)}\delta w+$$

$$AS_{yz}{}^{(n)}\delta w_{,y}+(n-1)A\beta_{,z}S_{yz}{}^{(n)}\delta v+nABS_{yz}{}^{(n-1)}\delta v+BS_{xz}{}^{(n)}\delta w_{,x}+$$
$$(n-1)B\alpha_{,z}S_{xz}{}^{(n)}\delta u+nABS_{xz}{}^{(n-1)}\delta u+AS_{yx}{}^{(n)}\delta u_{,y}BS_{xy}{}^{(n)}\delta v_{,x}-B_{,x}S_{yx}{}^{(n)}\delta v]dxdy \qquad \text{.......(7)}$$

ここで、

$$R_x{}^{(1)}=\int\sigma_x(1-z/R_2)z^1dz\ , \qquad R_y{}^{(1)}=\int\sigma_y(1-z/R_1)z^1dz$$
$$T^{(1)}=\int\sigma_z(1-z/R_1)(1-z/R_2)z^1dz\ , \quad S_{yz}{}^{(1)}=\int\sigma_y(1-z/R_1)z^1dz$$
$$S_{xz}{}^{(1)}=\int\tau_{xz}(1-z/R_2)z^1dz\ , \qquad S_{yx}{}^{(1)}=\int\tau_{xy}(1-z/R_1)z^1dz$$
$$S_{xy}{}^{(1)}=\int\tau_{xy}(1-z/R_2)z^1dz \qquad \text{.......(8)}$$

であり、積分の下限は$z=-h/2$、上限は$z=h/2$である。

運動エネルギーTの変分は次式となる。

$$dT=\rho\omega^2\iiint(udu+vdv+wdw)abdxdydz \qquad \text{.......(9)}$$

ここで、ρは密度であり、ω^2は固有円振動数である。

全ポテンシャルエネルギー$V(=U+T)$の変分$\delta V(=\delta U+\delta T)$を考慮すれば、運動方程式は以下のようになる。

$$\delta u_n;\left\{BR_x{}^{(n)}\right\}_{,x}-B_{,x}R_y{}^{(n)}-(n-1)B\alpha_{,z}S_{xz}{}^{(n)}-nABS_{xz}{}^{(n-1)}+\left\{AS_{yx}{}^{(n)}\right\}_{,y}+\rho AB\omega^2M_u{}^{(n)}=0$$
$$\delta v_n;\left\{AR_y{}^{(n)}\right\}_{,y}-(n-1)A\beta_{,z}S_{yz}{}^{(n)}-nABS_{yz}{}^{(n-1)}+\left\{BS_{xy}{}^{(n)}\right\}_{,x}+B_{,x}S_{yx}{}^{(n)}+\rho AB\omega^2M_v{}^{(n)}=0$$
$$\delta w_n;-B\alpha_{,z}R_x{}^{(n)}-A\beta_{,z}R_y{}^{(n)}-nABT^{(n-1)}+\left\{AS_{yz}{}^{(n)}\right\}_{,y}+\left\{BS_{xz}{}^{(n)}\right\}_{,x}+\rho AB\omega^2M_w{}^{(n)}=0$$
$$\text{.......(10.a,b,c)}$$

ここで、

$$M_u{}^{(n)}=\int u(1-z/R_1)(1-z/R_2)z^ndz\ , \qquad M_v{}^{(n)}=\int v(1-z/R_1)(1-z/R_2)z^ndz$$
$$M_w{}^{(n)}=\int w(1-z/R_1)(1-z/R_2)z^ndz \qquad \text{.......(11)}$$

であり、積分の下限は$z=-h/2$、上限は$z=h/2$である。

頂点が閉じたドームのような場合を除けば、x=一定における境界線は、$(u_n \text{ or } R_x{}^{(n)}),(v_n \text{ or } S_{xy}{}^{(n)})$および$(w_n \text{ or } S_{xz}{}^{(n)})$の適当な組み合わせで構成される。

式(5)の変位係数(u_n,v_n,w_n)を円周方向(θ)にFourier級数に展開し、以下のように表す。

$$u_n=u_m{}^{(n)}\cos m\theta\ , \quad v_n=v_m{}^{(n)}\sin m\theta\ , \quad w_n=w_m{}^{(n)}\cos m\theta \qquad \text{.......(12)}$$

ここに、mは円周方向の波数を表し、$(u_m{}^{(n)},v_m{}^{(n)},w_m{}^{(n)})$は独立変数xのみの関数である。式(12)を用いれば、運動方程式(10)は変位成分のみで表され、それは3(N+1)元の２階の線形常微分方程式系となる。

なお、回転体の中央面における回転半径をR_0と表せば、主曲率半径R_1及びR_2とR_0の関係は以下となる。

$$R_1=-\left\{1-\left(R_{0,x}\right)^2\right\}^{1/2}/(R_0)_{,xx}\ , \quad R_2=R_0/\left\{1-\left(R_{0,x}\right)^2\right\}^{1/2} \qquad \text{.......(13)}$$

円筒体の場合には、$R_1=\infty,\ R_2=R_0=a$（中央面における回転半径）であり、また$A=1,\ B=a$が成立する。

空間の離散化には、選点法を採用する。変位関数に$(M+2)$次の多項式を用いれば、全未知量の数は$3(M+2)(N+1)$個となる。この内、$3M(N+1)$個の条件は、M個の内部選点における残差条件より、残り$6(N+1)$個の条件は、殻の両端で規定される境界条件より得られる。