

I-12

積層偏平シェルの幾何学的非線形挙動解析

長崎大学 工学部 正 員 森田千尋
 長崎大学 工学部 正 員 松田 浩
 長崎大学 工学部 正 員 崎山 毅
 長崎大学 工学部 学生員 ○鈴木尉浩

1. まえがき

複合材料は、比強度、比剛性および軽量性に優れており、構造軽量化が重要なさまざまな産業分野で使用されている。一方向強化複合材を積層状にした積層板は力学的に強い異方性を示し、各層の材質、積層数および配向角などを変化させることにより、必要な方向に所要の特性を持たせられるため、目的に応じたさまざまな利用方法が考えられる。このような積層板は、平板および曲面板などの形で用いられることが多いが、曲面板の幾何学的非線形挙動まで取り扱った研究は、数少ないように思われる。

そこで、本研究では E.P., H.P. および円筒などの曲面形状をした積層偏平シェルに関して、ライズ、シェル厚、繊維強化方向の弾性係数比、積層数および配向角などをパラメータとして、飛び移り現象などの非線形挙動特性を明らかにすることを目的としている。

2. 積層偏平シェルの基礎微分方程式

およびその離散解

曲面の x, y 方向の曲率を k_x, k_y 、ねじれ率を k_{xy} とし、これらがあまり小さくなく、投影形状が矩形の曲面板を考える。図1に示すような N 層のラミナからなる積層偏平シェルに関して、せん断変形の影響を考慮した曲げに関する増分形の基礎微分方程式は次式のように表せる。

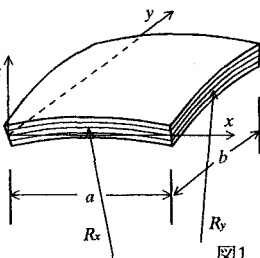
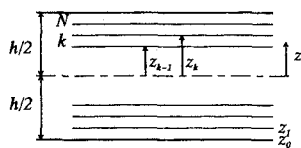


図1 積層偏平シェル



$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} - k_x \Delta Q_x = 0 \quad (1-1)$$

$$\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} - k_y \Delta Q_y = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + \left[k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \Delta N_x + \left[k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \Delta N_y + 2 \left[k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \Delta N_{xy} + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \Delta N_x + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \Delta N_y + 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \Delta N_{xy} + \Delta N_c + \Delta q = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1-5)$$

$$\Delta M_x = B_{11} \Delta e_x + B_{12} \Delta e_y + B_{16} \Delta e_{xy} + D_{11} \Delta \beta_x + D_{12} \Delta \beta_y + D_{16} \Delta \beta_{xy} \quad (1-6)$$

$$\Delta M_y = B_{12} \Delta e_x + B_{22} \Delta e_y + B_{26} \Delta e_{xy} + D_{12} \Delta \beta_x + D_{22} \Delta \beta_y + D_{26} \Delta \beta_{xy} \quad (1-7)$$

$$\Delta M_{xy} = B_{16} \Delta e_x + B_{26} \Delta e_y + B_{66} \Delta e_{xy} + D_{16} \Delta \beta_x + D_{26} \Delta \beta_y + D_{66} \Delta \beta_{xy} \quad (1-8)$$

$$\Delta Q_y = \kappa A_{44} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y \right) + \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x \right) \quad (1-9) \quad \Delta Q_x = \kappa A_{45} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y \right) + \kappa A_{55} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x \right) \quad (1-10)$$

$$\Delta N_x = A_{11} \Delta e_x + A_{12} \Delta e_y + A_{16} \Delta e_{xy} + B_{11} \Delta \beta_x + B_{12} \Delta \beta_y + B_{16} \Delta \beta_{xy} \quad (1-11)$$

$$\Delta N_y = A_{12} \Delta e_x + A_{22} \Delta e_y + A_{26} \Delta e_{xy} + B_{12} \Delta \beta_x + B_{22} \Delta \beta_y + B_{26} \Delta \beta_{xy} \quad (1-12)$$

$$\Delta N_{xy} = A_{16} \Delta e_x + A_{26} \Delta e_y + A_{66} \Delta e_{xy} + B_{16} \Delta \beta_x + B_{26} \Delta \beta_y + B_{66} \Delta \beta_{xy} \quad (1-13)$$

ここに、 Δ : 断面力および変形量の増分、 $q = q(x, y)$: 鉛直方向荷重強度、 $A_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$: 面内剛性、

$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$: カップリング剛性、 $D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$: 曲げ剛性、 $\bar{Q}_{ij}$: 各ラミナの配

向角および材料特性に依存する弾性定数、 E_1, E_2 : 材料主軸方向の弾性係数、 ν_{12}, ν_{21} : ポアソン比、 G_{12}, G_{13}, G_{23} : せん断弾性係数、 $\kappa = 5/6$: せん断修正係数、

$$\begin{pmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \\ \Delta e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - k_x w + \Delta W_{xx} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - k_y w + \Delta W_{yy} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - 2k_{xy} w + \Delta W_{xy} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Delta \beta_x \\ \Delta \beta_y \\ \Delta \beta_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \end{pmatrix},$$

$\Delta N_c, \Delta W_{xc}, \Delta W_{yc}, \Delta W_{xy}$: 各荷重段階における不平衡力および非線形項

式(1-1)～(1-13)において、無次元量 $X_1 \sim X_{13}$ および η, ξ

$$\begin{aligned} X_1 &= a^2 Q_y / [D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})], X_2 = a^2 Q_x / [D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})], X_3 = a M_{xy} / [D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})], X_4 = a M_y / [D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})], X_5 = a M_x / [D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})], \\ X_6 &= \theta_y, X_7 = \theta_x, X_8 = w/a, X_9 = v/a, X_{10} = u/a, X_{11} = a^2 N_{xy} / [D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})], X_{12} = a^2 N_y / [D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})], X_{13} = a^2 N_x / [D_0(1-\nu_{12}\nu_{21})], \\ \eta &= x/a, \xi = y/b, a, b: \text{偏平シェルの矩形Baseの辺長}, \mu = b/a, h_0: \text{基準シェル厚}, D_0 = E_2 h_0^3 / [12(1-\nu_{12}\nu_{21})]: \end{aligned}$$

基準シェル剛度

を導入し無次元化後、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、偏平シェルの任意の離散点における解析的近似解は次式のように求められる。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{k=1}^{10} \left\{ \sum_{r=0}^i a_{pijkd} \Delta X_{rk0} + \sum_{s=0}^j b_{pijld} \Delta X_{slj} \right\} + \Delta q_{pij} \quad (2)$$

式(2)の導入過程については、文献1),2)を参照されたい。

3. 数値解析結果

数値解析に用いた積層偏平シェルは、四辺単純支持（ピン）され等分布荷重を受けるクロスプライ積層EP. シェルである。

まず、本解法による数値解の精度を検討するために、本法によって得られた逆対称クロスプライ積層偏平シェル ($N=2$) の中央点での荷重～たわみ曲線を Liao ら³⁾ の有限要素解とともに図2に示す。なお、積層シェルの諸元および各ラミナ材料特性は以下のようなものである。

$$H/h = 0.3125, a/h = 50, \quad (H: \text{偏平シェルのライズ})$$

$$E_1/E_2 = 25, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.15$$

図2より、本法による解は面内の拘束が比較解とは多少異なるものの、非線形挙動はほぼ一致しているものと思われる。

次に、積層数 N の違いによる非線形挙動特性を明らかにするために、対称および逆対称クロスプライ積層偏平シェル ($N=2,4,6$) の荷重～たわみ曲線を図3に示す。積層シェルの諸元および各ラミナ材料特性は以下のようなものである。

$$H/h = 1.25, a/h = 50$$

$$E_1/E_2 = 25, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

最後に数値計算を行って戴いた東京大学大学院生、岩佐貴史君（研究当時、長崎大学4年生）に謝意を表します。

【参考文献】 1) 崎山他：変厚矩形板の曲げの一解析法、土木論集，338号，1983. 2) 森田他：変厚偏平シェルの幾何学的非線形挙動解析，構造論集，Vol.40A，1994. 3) C.L.Liao and J.N.Reddy: Analysis of Anisotropic, Stiffened Composite Laminates Using a Continuum-Based Shell Element, Comput. & Struct., Vol.34, No.6, 1990.

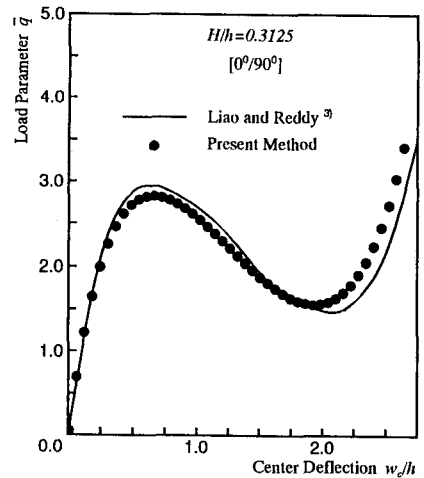


図2 積層偏平シェルの荷重～たわみ曲線

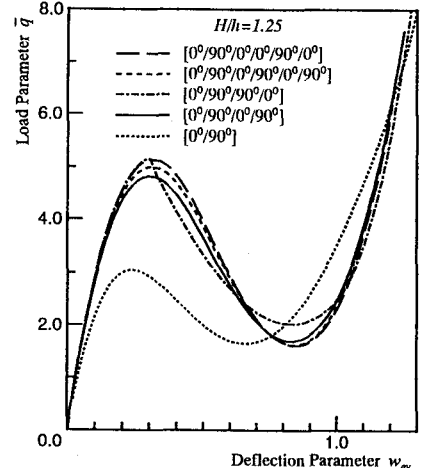


図3 積層数の違いによる積層偏平シェルの荷重～たわみ曲線