# Ｉ-11　積層板の有限要素解析

山口大学工学部　学生員　○　山本　直子
山口大学工学部　正　員　浜田　純夫

## １．まえがき

種々の力学的特性を有する板やひび割れを含む弾塑性解析に対し、積層板の理論を用いて解析が進められてきている。これらの解析には有限要素法が適用されている研究が多く、層ごとに異なった仮定を設ける理論と全層にわたって一体化した理論に大別される。前者においては、高次理論を用いて理論的により近い値を求めようとしているものもあるが、有限要素法を用いると未知数増大の難点を持っている。一方、ＲＣ床版の様にひび割れを含む弾塑性解析に対して後者の理論を用いた例が多いが、この解析法の問題点として中央面が各要素によって異なるという不合理が生ずることである。この様な問題点に着目し、本研究では未知数増大の難点を克服し、層状性板の弾塑性解析にも容易に適用できる有限要素解析の剛性行列を開発するとともに、各層および各要素で異なった性状を仮定した弾塑性的な解析の解析例を示し検討を行う。

## ２．仮想仕事に基づくつり合い方程式

図１のように板の中立面にｘ、ｙ軸をとり、これと直角方向をｚ軸とすると、板の任意点のひずみは薄板理論（Kirchhoffの法則）に基づけば、次式で表される。薄板理論では平面応力問題とされ、板の厚さ方向全てにわたり応力$\sigma_z$、$\tau_{xz}$および$\tau_{yz}$が０と仮定されている。

$$\varepsilon_x = u_{,x} - z w_{,xx} \quad \cdots\cdots(1) \qquad \varepsilon_y = v_{,y} - z w_{,yy} \quad \cdots\cdots(2)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} - 2 z w_{,xy} \quad \cdots\cdots(3)$$

弾性体に関するフックの法則に基づけば応力は、

$$\sigma_x = \overline{E}\,(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \quad \cdots(4) \qquad \sigma_y = \overline{E}\,(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \quad \cdots(5)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1-\nu}{2}\overline{E}\,\gamma_{,xy} \quad \cdots(6) \qquad \overline{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \cdots\cdots(7)$$

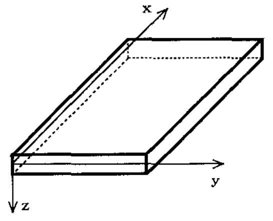


図１．平　板

一方、未知数を増やさないために、各層の変位$u_i$、$v_i$および$w_i$を１層目の変位$u_1$、$v_1$および$w_1$で次のように表すことにする。

$$u_i = u_1 - w_{,x}\overline{z_i} \quad \cdots(8) \qquad v_i = v_1 - w_{,y}\overline{z_i} \quad \cdots(9)$$

$$w_i = w_1 \quad \cdots(10)$$

（$w$：たわみ，$w_{,x}$：ｘ方向のたわみ角　$w_{,y}$：ｙ方向のたわみ角，$\overline{z}$：中央面間の距離）

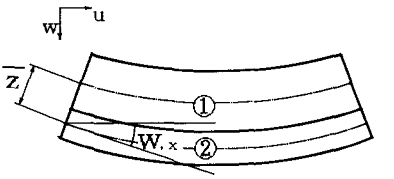


図２．２層板の仮定

多層板の内部仮想仕事$\delta U$は、ｉ層目の内部仮想仕事$\delta\overline{U_i}$によって次のように表される。

$$\delta U = \sum \delta\overline{U_i} = \sum\int_V (\sigma_{i,x}\delta\varepsilon_{i,x} + \sigma_{i,y}\delta\varepsilon_{i,y} + \tau_{i,xy}\delta\gamma_{i,xy})\,dV \quad \cdots\cdots(11)$$

この様に、式(11)に式(1)～式(10)を代入することにより内部仮想仕事$\delta U$が求められる。

## ３．有限要素法の定式化

多層板の変位は、各層ごとのズレはないと仮定しているため（完全に付着していると仮定）、各層の中央面での面内、面外方向の変位は１層板の変位で表される。そこで、有限要素法を用いるために、要素内における１層板の中央面での変位を次のように仮定する。

$$w = \sum_{i=1}^{9}\{f_i(x,y)\,w_i + f_{xi}(x,y)\,w_{i,x} + f_{yi}(x,y)\,w_{i,y} + f_{xyi}(x,y)\,w_{i,xy}\} \quad \cdots(12)$$

$$u = \sum_{i=1}^{9} g_j(x,y)\,u_j \quad \cdots\cdots(13) \qquad v = \sum_{i=1}^{9} g_j(x,y)\,v_j \quad \cdots\cdots(14)$$

ここで、ｕ、ｖは面内方向の中央面での変位であり、ｗは面外方向の変位で各層共通である。

一方、面内、面外方向の変位を表す形状関数については１次元問題で用いられるはり要素変位が２次および４次曲線でたわむと仮定したいわゆるHermit関数を用いることとし、この形状関数をｘ、ｙ方向について組み合わせたものを用いた。いずれも、１要素において図３に示した９節点におけるｘおよびｙ方向の変位ｕ、ｖ、たわみｗ、ｘおよびｙ方向のたわみ角$w_{,x}$、$w_{,y}$、およびせん断変形$w_{,xy}$、すなわち４３個の自由度について次の様に設けた。

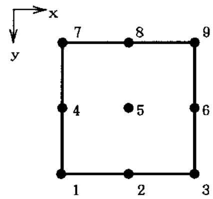

図３．板　要　素

１，３，７，９　：　ｕ　ｖ　ｗ　$w_{,x}$　$w_{,y}$　$w_{,xy}$
２，８　：　ｕ　ｖ　ｗ　$w_{,y}$　　　５　：　ｕ　ｖ　ｗ
４，６　：　ｕ　ｖ　ｗ　$w_{,x}$

## ４．解析結果と考察

四角形要素で分割した四辺単純支持および四辺固定の板に等分布荷重を載荷し、その板を多層に分割した時の平板中央のたわみを解析し理論値との比較によって形状関数の妥当性の検討を行った。表１に計算結果を示す。ここで、四辺単純支持では、たわみ角$w_{,x}=0$または$w_{,y}=0$とし、$w_{,xy}\neq 0$とした。表１に示すように、１枚板においては従来の方法に比べると２×２分割で既に近い値を示しており、さらに分割数を増やすことによって理論値に収束することが判明した。また、枚数を増加させても同様に理論値に収束しているが、誤差が幾分大きくなるのは板の形状関数が４次式、平面の変位が２次式で変位を仮定するため、ひずみは板に関して２次、平面に関して１次となり板の変位関数と平面の変位関数に整合性が失われることに起因しているものと思われる。

表１．多　層　板（$10^{-3}qa^4/D$）

| 四　辺　単　純　支　持 | | | |
|---|---|---|---|
| 分割数 | １枚板 | ２枚板 | ４枚板 |
| 1×1 | 4.0984 | 3.8767 | 3.7675 |
| 2×2 | 4.0606 | 4.0804 | 4.0867 |
| 4×4 | 4.0633 | 4.0650 | 4.0662 |
| 理論値 | 4.062 | | |
| 四　辺　固　定 | | | |
| 分割数 | １枚板 | ２枚板 | ４枚板 |
| 1×1 | 1.3287 | 0.7592 | 0.4946 |
| 2×2 | 1.2569 | 1.2599 | 1.2467 |
| 4×4 | 1.2653 | 1.2642 | 1.2630 |
| 理論値 | 1.265 | | |

## ５．弾塑性解析の解析例

本研究で提案した多層板の解析法を適用し、図４および図５の様な床版について解析を行った。解析結果を表２に示す。

表２．解　析　結　果

| ＲＣ床版 | | 合成板 | |
|---|---|---|---|
| ひび割れ無 | 有 | 鋼板 無 | 有 |
| 0.013592 | 0.015795 | 0.013882 | 0.009763 |

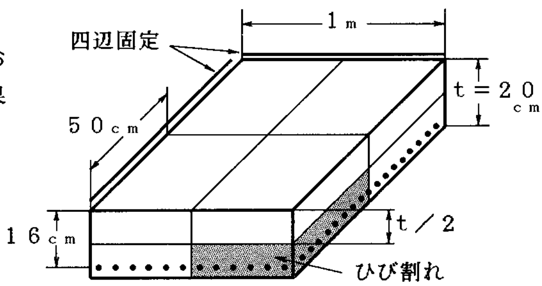

図４．ひび割れを含むＲＣ床版

## ６．あとがき

本研究で得られた主な結果を、以下のように示す。

１）仮想仕事の原理に基づき、キルヒホッフの仮定を取り入れることで未知数の増加を防いだ。

２）板および平面の形状関数を４次および２次式で仮定し解析を行うと、層を重ねる度に幾らか影響を受け精度が下がるが、１枚板との差はあまり生じないことから多層板の解析に十分適用できるものと思われる。

３）各層および各要素で異なった性状を仮定した弾塑性解析にも、十分適応可能な解析法である。

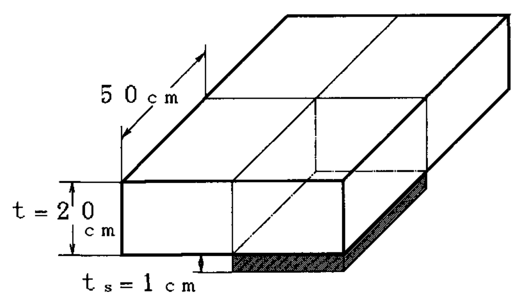

図５．一部鋼板を含む床版