

I-4

軸圧縮力を受ける円筒殻のRS解析

豊橋技術科学大学 正会員 山田 聖志
豊橋技術科学大学大学院 学生会員 ○佐々木政幸

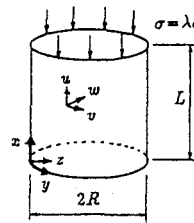


図1. 円筒殻の形状と記号の定義

1.序 形状初期不整に敏感なシェル構造物の弾性座屈解析は、今世紀初頭より多数の研究が行われている。しかし、座屈耐力を大きく低下させる形状初期不整の設計取扱い方については、未だ困難な課題として残されている。この点に関して、初期不整データバンクを利用するArbodzら^[1]の方法、RS(Reduced Stiffness)解析にて座屈下限値(RS値)を求める Crollらの方法^[2,3]が注目されている。

本研究は、後者について、軸圧縮力を受ける薄肉円筒殻を対象として、RS理論の適用性を明らかにすることを目的としている。この観点についてはBattista^[4]によって実験値との比較から詳細な議論がなされているが、その論文において、歪変位関係式は一部誤りがあり、また、境界条件の記述に不明瞭な点を有している。

本報は、以上の現状を踏まえ、ロンドン大学 Croll教授との一連の共同研究^[3,5,6]の一部として、歪変位関係式の近似度がRS値に及ぼす影響、並びに、初期不整を考慮した既往の非線形解析との対応関係について検討を試みたものである。

2.古典的座屈解析法 図1に示すような軸圧縮力 σ (圧縮正)を受ける円筒殻の座屈前応力状態は $n_x^F = -\sigma t = -\lambda \sigma_d t < 0$, $n_y^F = n_{xy}^F = 0$ となる。ここで λ は荷重係数で、古典座屈荷重 σ_d に対する比で表される。座屈条件式は、本問題の場合、次式で表される^[6]。

$$\delta (U_{2k} + U_{2m} + \lambda V_{2m}^* + \lambda V_{2m}^v) = 0 \quad (1)$$

但し

$$U_{2k} = \frac{D}{2} \iint \left\{ (\kappa_x')^2 + (\kappa_y')^2 + 2\nu \kappa_x' \kappa_y' + 2(1-\nu)(\kappa_{xy}')^2 \right\} dx dy \quad (2)$$

$$U_{2m} = \frac{K}{2} \iint \left\{ (\epsilon_x')^2 + (\epsilon_y')^2 + 2\nu \epsilon_x' \epsilon_y' + 2(1-\nu)(\epsilon_{xy}')^2 \right\} dx dy \quad (3)$$

$$V_{2m}^* = -\frac{\sigma_d t}{2(1-\nu^2)} \iint \left\{ (2-\nu^2)\epsilon_x'' + \nu \epsilon_y'' \right\} dx dy \quad (4)$$

$$V_{2m}^v = -\frac{\sigma_d t}{2(1-\nu^2)} \iint \left\{ \nu^2 \epsilon_x'' + \nu \epsilon_y'' \right\} dx dy \quad (5)$$

ここで、 $D = Et^3/12(1-\nu^2)$, $K = Et/(1-\nu^2)$, E はヤング係数、 $\nu=0.3$ はポアソン比とする。曲げ歪 $(\kappa_x', \kappa_y', \kappa_{xy}')$ 、面内歪 $(\epsilon_x', \epsilon_y', \epsilon_{xy}', \epsilon_x'', \epsilon_y'', \epsilon_{xy}'')$ の各成分は近似の程度により3種類(Nタイプ、Bタイプ^[4]、Dタイプ)を選び各々検討する。

Nタイプ (Non-Shallow Type)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x' &= \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_y' = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R}, \epsilon_{xy}' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \kappa_x' &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \kappa_y' = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \kappa_{xy}' &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2R} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \epsilon_x'' &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_y'' &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_{xy}'' &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{w}{R} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Bタイプ (Batista Type)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x', \epsilon_y', \epsilon_{xy}', \kappa_x', \kappa_y', \kappa_{xy}' &\text{はNon-Shallow Typeの式に同じ。} \\ \epsilon_x'' &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_y'' &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_{xy}'' &= \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{v}{R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Dタイプ (Donnell Type)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x', \epsilon_y', \epsilon_{xy}' &\text{はNon-Shallow Typeの式に同じ。} \\ \kappa_x' &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \kappa_y' = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \kappa_{xy}' = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ \epsilon_x'' &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \epsilon_y'' = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \epsilon_{xy}'' = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(6)~(8)式のいずれかを(2)~(5)式に代入すると、座屈変位 (u, v, w) に関する停留条件式は、 (u, v, w) に関する線形同次の偏微分方程式となる。表1のように2種類の境界条件に対し各々変位関数を選ぶことができる。これにより(1)式は線形連立同次の代数方程式となり、固有値解析を行うことで、固有値として荷重係数 $\lambda=\lambda^*$ を得ることができる。

3.RS解析法 文献^[1]は、初期不整のある軸圧縮力を受ける円筒殻に対して、(5)式の V_{2m}^* が座屈前のたわみの増大と共に損失するメカニズムを提案している。(1)式においてこの項を形式的に消去した

$$\delta (U_{2k} + U_{2m} + \lambda^* V_{2m}^*) = 0 \quad (9)$$

から計算されるRS値 λ^* は、実験結果の座屈下限値を与えることが論議されている。

一方、最近の論文^[5]は(3)式の U_{2m} が初期不整によってトータルとして減少するメカニズムを、非線形数値解析的に明らかにしている。即ち

$$\delta (U_{2k} + \lambda^{**} V_{2m}^*) = 0 \quad (10)$$

本研究では、これら既往の研究成果をもとに、(9)又は(10)式で得られるRS値 λ^*, λ^{**} が、(6)~(8)式の相違によって変化する特性を明確にすると共に、各々の臨界値と既往のYamaki^[6]による非線形数値解析との比較対応について論ずる。

4.結果と考察 3種類の歪変位関係式に対応する古典座屈値とRS値の最小値($\lambda_{min}^c, \lambda_{min}^*$)は、 L/R (径長比)をパラメータとして、図2に示される。Euler Curveの破線は、両端単純柱の座屈応力曲線である。NタイプとBタイプでは、いずれの場合でも高々0.3%の差しかなく、一致した。一方、Dタイプの λ_{min}^c は、 L/R が大きくなる程、近似度が悪くなる。 L/R が36.14以上では、長柱の座屈形式に移行している。以上のN-Bタイプの λ_{min}^* に関する結果は、文献^[6]の Flügge 解(Fig.2.26)に良く一致している。RS値に及ぼす、歪変位関係式の近似度の影響は、 $L/R=11$ 以下では極めて小さいことが特に注目される。

各座屈モードに対応して得られる臨界荷重は、図3のようなスペクトルとして得られる。形状初期不整を考慮して修正されたDタイプ式に対する非線形座屈解^[6]も、プロットされている。それらは、 $i=12$ と14では λ^* 、 $i=17$ では λ^{**} によって下限を抑えられている。より大きな初期不整に対しては、 λ^{**} を用いた座屈下限評価が必要と考察される。

【参考文献】

- [1]Arbocz: Proc. IUTAM Symp. on Collapse, London, Cambridge Univ. Press, pp.43-74, 1983
- [2]Croll: Der Stahlbau, Vol.8, pp.243-248, 1975
- [3]S.Yamada and J.G.A.Croll: Proc., J. of Engrg. Mech., ASCE, Vol.115, pp.327-344, 1989
- [4]Batiata: Ph.D, Dissertation, Univ. of London, 1979
- [5]S.Yamada and J.G.A.Croll: Proc., J. of Applied Mech., ASME, Vol.60, pp.290-299, 1993
- [6]S.Yamada, K.Uchiyama and J.G.A. Croll: Proc. SEIKEN-IASS Symp., Tokyo, pp.151-158, 1993
- [7]J.G.A.Croll and C.P.Ellinas: Proc., Int.J. Solids Structures, Vol. 19, pp.461-477, 1983
- [8]N.Yamaki: Elastic stability of circular cylindrical shells, NORTH-HOLLAND, 1984

表1 境界条件と変位関数

境界条件	変位関数
SS3 $w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} = v = 0$ at $x = 0, L$	$u = \frac{Lx}{R} u_{ij} \cos \left(\frac{iy}{R} \right) \cos \left(\frac{j\pi x}{L} \right)$ $v = \frac{Lx}{R} v_{ij} \sin \left(\frac{iy}{R} \right) \sin \left(\frac{j\pi x}{L} \right)$ $w = t w_{ij} \cos \left(\frac{iy}{R} \right) \sin \left(\frac{j\pi x}{L} \right)$
C3 $w = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} = v = 0$ at $x = 0, L$	$u = \frac{Lx}{R} \sum_j u_j \cos \left(\frac{iy}{R} \right) \cos \left(\frac{j\pi x}{L} \right)$ $v = \frac{Lx}{R} \sum_j v_j \sin \left(\frac{iy}{R} \right) \sin \left(\frac{j\pi x}{L} \right)$ $w = t \sum_j w_j \cos \left(\frac{iy}{R} \right) \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{(j-1)\pi x}{L} \right) - \cos \left(\frac{(j+1)\pi x}{L} \right) \right]$

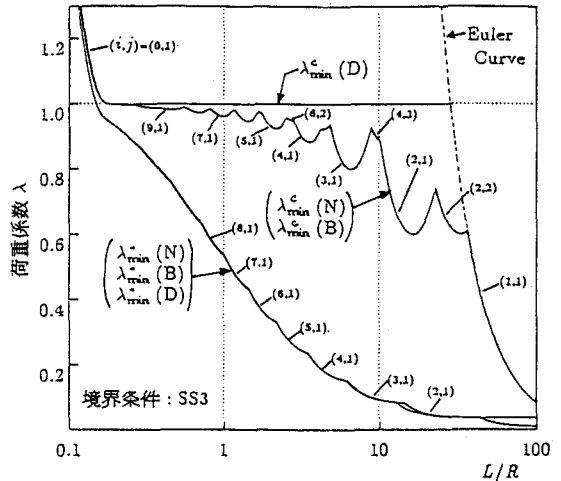


図2. 荷重係数(λ, λ^*)と L/R との関係
; $R/t=100$

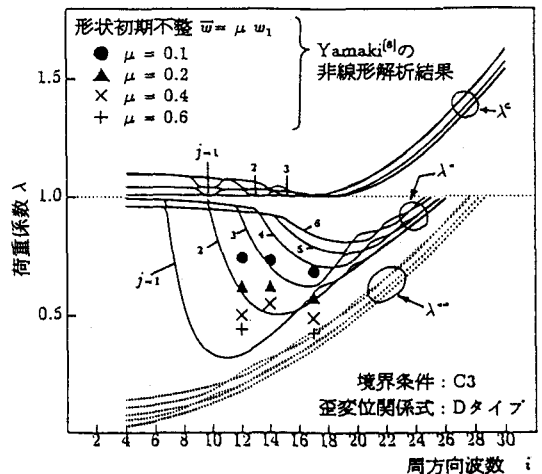


図3. 本解析とYamaki^[6]の非線形解析との比較
; $R/t=405, L/R=1.14$