

I-3

板曲げ効果を考慮した薄肉はりのせん断遅れ方程式

東京理科大学 学生員○落合 俊博
正 員 白木 恒雄

1. まえがき

曲げ荷重を受ける張り出し箱桁のせん断遅れをはりの理論で解いた¹⁾。Timoshenkoはり形のせん断変形を第0段階とし、第6段階まで逐次近似させ、13次多項式で軸方向垂直応力を表現した。弾性論の重調和偏微分方程式の解と比較して、きわめて良く一致していることも確認した。

偏載荷重を受けるとはりはねじりと断面変形を生じ、板曲げの影響は大きいと推察される。そこで、今回、せん断遅れを扱うはりの理論に新たに板曲げ効果を導入して支配方程式を誘導した。

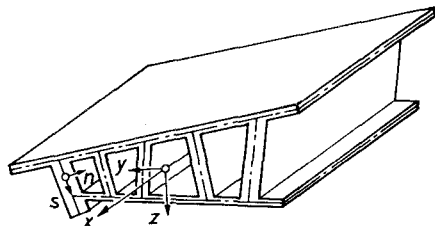
2. 仮定

板厚方向の挙動を考慮する方法は2種類考えられる。ひとつははりの構成要素を板あるいはシェルとして扱う²⁾。他ははり断面を肉厚中心線で考えつつ、適宜板厚方向のひずみ場の仮定を取り入れる方法である^{3), 4)}。ここでは前者の方法に拠った。図1のごとき主座標系を採用する。また、断面輪郭線座標およびそれに直交する法線方向座標をそれぞれ s, n とする。仮定:

- (1) 板厚方向の伸縮はない ($\epsilon_n=0$)。
- (2) 断面内板厚中心線の伸縮はない ($\epsilon_s(x, s, n)|_{n=0}=0$)。
- (3) 板は Kirchhoff-Love の仮定に従う ($\gamma_{sn}=0, \gamma_{ns}=0$)。
- (4) 平面応力問題と板曲げ問題は連成しない。

3. 支配方程式と境界条件式

軸方向変位、断面輪郭線の接線および法線方向変位をそれぞれ $u(x, s), f_s(x, s), f_n(x, s)$ とするならば、次式となる。



$$u(x, s) = -\sum_{i=0}^N w_{sLi}^T(s) \Theta_{si}(x), \quad f_s(x, s) = r^T(s) V(x), \quad f_n(x, s) = b^T(s) V(x)$$

図1

i はせん断遅れの段階数である。 $i=0$ は従来のTimoshenko梁型の1次式の反り、 $i=1$ は3次式の反り、最後の $i=N$ は $2N+1$ 次の反り変形に対応する。ゆえに、0段階の基底反り関数ベクトルは従来どうり

$$w_{sL0}^T(s) = (1 \quad y \quad z \quad w_T \quad w_{P1} \cdots w_{Pm})$$

となる。上添字の T は転置ベクトル、下添字の T, P はそれぞれねじりおよび断面変形を、 P の隣の数字は断面変形の形状番号を意味する。断面輪郭線の接線および法線方向の基底変位関数は

$$r^T(s) = (0 \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha \quad r_T \quad r_{P1} \cdots r_{Pm}), \quad b^T(s) = (0 \quad \sin \alpha \quad \cos \alpha \quad b_T \quad b_{P1} \cdots b_{Pm})$$

となる。 α は y 軸と板の断面輪郭線座標との為す角である。 $r_T, r_{P1}, \dots, r_{Pm}$ はねじりのせん断中心あるいは基本断面変形ごとの板回転中心より板の接線までの距離の関数、 b_T はせん断中心より板の法線までの距離、 $b_{P1}, \dots, b_{Pm}$ は基本断面変形ごとの板回転中心より板の法線までの距離の関数に横曲げモーメントによるたわみ成分を加えたものである。この板曲げの成分を除けば、すべて基底変位関数は輪郭線座標 s の1次式である。板曲げの成分は両端の横曲げモーメントの影響のみ考慮すれば3次式となる。この3次式の4つの係数は板ごとの両端のたわみ値と横曲げモーメント値の計4つの情報より決定される。

これらの変位式よりひずみおよび応力の成分を書き下すと以下のごとなる。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^M(x, s) &= -\sum_{i=1}^N w_{SLi}^T(s) \Theta'_{SLi}(x), & \sigma_x^M(x, s) &= -E \sum_{i=1}^N w_{SLi}^T(s) \Theta'_{SLi}(x) \\ \gamma_{xs}^M(x, s) &= r^T(s) V'(x) - \sum_{i=0}^N w_{SLi}^T(s) \Theta_{SLi}(x), & \tau_{xs}^M(x, s) &= G[r^T(s) V'(x) - \sum_{i=0}^N w_{SLi}^T(s) \Theta_{SLi}(x)] \\ \varepsilon_x^B(x, s, n) &= -b^T(s) \ddot{V}(x) n, & \sigma_x^B(x, s, n) &= -\frac{E}{1-\nu^2} [b^T(s) \ddot{V}(x) + \nu \ddot{b}^T(s) V(x)] \\ \varepsilon_s^B(x, s, n) &= -\ddot{b}^T(s) V(x) n, & \sigma_s^B(x, s, n) &= -\frac{E}{1-\nu^2} [\ddot{b}^T(s) V(x) + \nu b^T(s) V''(x)] \\ \gamma_{xs}^B(x, s, n) &= -2\dot{b}^T(s) V'(x) n, & \tau_{xs}^B(x, s, n) &= -2G\dot{b}^T(s) V'(x) n\end{aligned}$$

上添字の M, B は平面応力あるいは板曲げを区別するため付与した。 E, G, ν は順に縦弾性係数, 横弾性係数, そして Poisson 比である。これらを仮想変位の原理の式

$$\begin{aligned}-\int_F [\sigma_x^M \delta \varepsilon_x^M + \sigma_s^B \delta \varepsilon_s^B + \sigma_x^B \delta \varepsilon_x^B + \tau_{xs}^M \delta \gamma_{xs}^M + \tau_{xs}^B \delta \gamma_{xs}^B] dF dx + \\ + \int_F [p_Q(x, s) \delta v_Q ds dx + \int_F p_N(x, s) \delta u dF dx + \sum P_Q \delta v_Q + \sum P_N \delta u = 0\end{aligned}$$

に代入整理すると, 次のとき断面力関係式と力学的境界条件式を得る。

$$M'_{SLi}(x) - Q_{SLi}(x) + \int_F p_N(x, s) w_{SLi}(s) dF = 0 \quad (i=0 \sim N), \quad Q'(x) - EI_K V'(x) + \int_S p_Q(x, s) r^T(s) ds = 0,$$

$$[M_{SLi}(x) - \sum P_N w_{SLi}]_0 = 0 \quad (i=0 \sim N), \quad [Q(x) - \sum P_Q r^T]_0 = 0$$

ただし, 反りモーメントベクトルおよびせん断力ベクトルは次のごとく定義した。

$$M_{SLi}(x) = -EF_{SLi} \Theta'_{SLi}(x), \quad Q_{SLi}(x) = GH_i^T V'(x) - G \sum_{j=0}^N W_{ij} \Theta_{SLj}(x), \quad Q(x) = GJV'(x) - G \sum_{j=0}^N H_j \Theta_{SLj}(x)$$

断面諸量のマトリックスは次のごとく設定した。

$$F_{SLi} = \int_F w_{SLi} w_{SLi}^T dF, \quad H_i = \int_F r w_{SLi}^T dF, \quad W_{ij} = \int_F w_{SLi} \dot{w}_{SLj}^T dF, \quad I_K = \frac{1}{E} \int_S K \ddot{b} \ddot{b}^T ds$$

$$J = \int_S r r^T dF + \int_S \frac{1}{3} \dot{b} \dot{b}^T t^3 ds - \frac{\nu}{G} \int_S K (\dot{b} \ddot{b}^T + \ddot{b} \dot{b}^T) ds$$

ここで K は板の曲げ剛性 ($K = Et^3 / 12(1 - \nu^2)$) を意味する。

この断面力ベクトルを上記の断面力関係式に代入すれば, 変位ベクトルによる $N+2$ 本の支配方程式を得る。

4. まとめ

はりの工学曲げ理論をねじりおよび断面変形を含めて一般化した「拡張曲げ理論」をさらにせん断遅れに拡張し, ずり荷重を精度良く解析する目的で板曲げ効果を取り込んだ。これにより, ラーメン剛性および St. Venant の板のねじり剛性が式中に系統的に導入できる。また, ねじり抵抗マトリックス J の第3項より, 板曲げを考慮しないとねじり抵抗を大きめに評価することがわかる。

5. 参考文献

- 1) 澤田・臼木: 土木学会第48回年次学術講演概要集第1部, 1993.
- 2) Schardt: Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, Springer, 1989.
- 3) Kollbrunner, Hajdin: Dünnwandige Stäbe, Springer, 1972.
- 4) 西野・長谷川・名取: 土木学会論文報告集, No. 248, 1976, 25.