III-588　すべりを含む各種境界条件下での異方性半無限体の定常熱弾性問題の解

山梨大学大学院　学生員　清水秀樹
大成建設（株）　正会員　飯星　茂
山梨大学大学院　学生員　大里祥生
山梨大学工学部　正会員　平島健一

１．緒言

最近では、高レベルの放射性廃棄物の地下処分あるいはエネルギーや物質の地下貯蔵などが重要な研究題目になりつつある。本論文では、奥行(z軸)方向に一定の線状熱源を有し、弾性主軸が面外方向にも傾斜している異方性半無限体を対象とし、その表面境界条件として自由・固定・すべりなどの４条件、さらに温度条件として半無限体表面での等温・断熱の２条件を採用できるようにした場合の弾性厳密解を提示する。ここでの成果は境界要素法などの基本解として利用できるものである。

２．基礎方程式および基本解

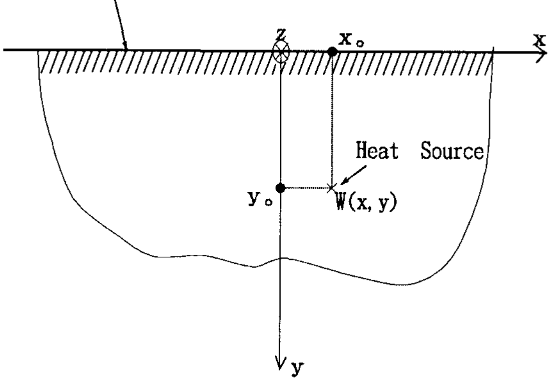
２．１　応力･変位を求める公式　均質な３次元異方性弾性半無限体を考え、図－１のように座標軸および熱源を配置する。

<釣合式>

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{x,x}+\tau_{xy,y}=0,\quad \tau_{xy,x}+\sigma_{y,y}=0,\\ \tau_{xz,x}+\tau_{yz,y}=0.\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

<構成式>

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_x=\beta_{11}\sigma_x+\beta_{12}\sigma_y\cdots\cdot+\beta_{16}\tau_{xy}+\alpha_{11}T,\\ \varepsilon_y=\beta_{12}\sigma_x+\beta_{22}\sigma_y\cdots\cdot+\beta_{26}\tau_{xy}+\alpha_{22}T,\\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \gamma_{zy}=\beta_{16}\sigma_x+\beta_{26}\sigma_y\cdots\cdot+\beta_{66}\tau_{xy}+\alpha_{12}T.\end{array}\right\}\quad\cdots\cdot(2)$$



図－１

ただし、平面ひずみの仮定より、σ_zは次のようになる。

$$\sigma_z=-\frac{1}{a_{33}}(a_{13}\sigma_x+a_{23}\sigma_y+a_{34}\tau_{yz}+a_{35}\tau_{xz}+a_{36}\tau_{zy}+a_{33}T).\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

ここに、

$$\beta_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}.\quad (i,j=1,2,4,5,6)\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

また、α_{ij}は線膨張係数を表している。

<適合条件式>

$$\varepsilon_{x,yy}+\varepsilon_{y,xx}-\gamma_{xy,xy}=0.\quad \gamma_{yz,x}-\gamma_{xz,y}=0.\quad(5)$$

<熱伝導関係式><熱流方程式>

$$\left.\begin{array}{l}f_x=k_{11}T_{,x}+k_{12}T_{,y}\\ f_y=k_{21}T_{,y}+k_{22}T_{,y}\\ f_z=k_{13}T_{,z}+k_{23}T_{,y}\end{array}\right\},\quad f_{x,x}+f_{y,y}=W(x,y)\quad(6)$$

ここに、f_iは熱流束を、Wは熱源強度を表す。上式より解析解を得るために、次の応力関数を導入する。

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_x=F_{,yy},\quad \sigma_y=F_{,xx},\quad \tau_{xy}=-F_{,xy},\\ \tau_{xz}=\Psi_{,y},\quad \tau_{yz}=-\Psi_{,x}.\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(7)$$

式(7)を式(2)に代入し、その結果と式(5)より、次のような微分方程式が得られる。

$$\left.\begin{array}{l}L_4F+L_3\Psi+M_2T=0,\\ L_3F+L_2\Psi+M_1T=0.\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

これらの式において$W=0$とおいた式を求めるために、次式を満たす関数Φを導入する。

$$N_2(L_2L_4-L_3^2)\Phi=0.\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

これをもとにして次式が得られる。

$$\left.\begin{array}{l}T=-(L_2L_4-L_3^2)\Phi,\\ F=(L_2M_2-L_3M_1-N_2).\Phi\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

微分演算子を整理して、次のように表示する。

$$\left.\begin{aligned} &L_2L_4 - L_3^2 = (\beta_{11}\beta_{55} - \beta_{15}^2)\prod_{k=1}^{6}(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_k\frac{\partial}{\partial x}),\\ &L_2M_2 - L_3M_1 - N_2\\ &\qquad = (\beta_{55}\alpha_{11} - \beta_{15}\alpha_{13})\prod_{k=1}^{4}(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_k\frac{\partial}{\partial x}). \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

式中の$\mu_k(k = 1, 2, \cdots, 6)$ および$\lambda_k(k = 1, 2, 3, 4)$ はそれぞれの微分演算子の特性根である。式(11)を用いて、関数T, Fは次のように表される。

$$\left.\begin{aligned} &T = -(\beta_{11}\beta_{55} - \beta_{15}^2)\prod_{k=1}^{6}(\frac{\partial}{\partial y} - \mu_k\frac{\partial}{\partial x})\Phi,\\ &F = (\beta_{55}\alpha_{11} - \beta_{15}\alpha_{13})\prod_{k=1}^{4}(\frac{\partial}{\partial y} - \lambda_k\frac{\partial}{\partial x})\Phi. \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdot(12)$$

一方、熱伝導関係式、熱流方程式を整理して演算子 N_2 の特性根$\mu_k(k = 7, 8)$ が求められる。

２．２　無限体内の定常線状熱源の問題

関数Φを次のように設定する。

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{30}\sum_{k=1}^{8} A_k z_k^6(\ln\frac{z_k}{d_k} - \frac{49}{20}), \qquad \cdots\cdots\cdots(13)$$

$$z_k = x + \mu_k y, \quad d_k = a + \mu_k b. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

これにより、直ちに温度場$T = T(x, y)$が決定される。温度場が一価関数で表されること、および$\oint f_n ds = W(x, y)$が成り立つことより、定数 A_7, A_8が決定される。また、

$$\left.\begin{aligned} &B_k = -24(\beta_{55}\alpha_{11} - \beta_{15}\alpha_{13})\cdot m(\mu_k, \lambda)\cdot A_k\\ &C_k = \frac{1}{\ell_2(\mu_k)}[\ell_3(\mu_k)B_k\\ &+\frac{1}{2\pi i}\frac{W}{k_{22}(\mu_7 - \mu_8)}\{\delta_{k7}\cdot m_1(\mu_7) + \delta_{k8}\cdot m_1(\mu_8)\}]. \end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$\left.\begin{aligned} &m(\mu_k, \lambda) = \prod_{j=1}^{4}(\mu_k - \lambda_j),\\ &m_1(\mu_k) = \alpha_{13}\mu_k - \alpha_{23}. \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

上記のように設定すると、応力は次式で表される。

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{8}\mu_k^2 B_k \ln\frac{z_k}{d_k}, \quad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

これらを式(2)へ代入し、積分すると変位成分が得られる。未知係数 B_k, C_kは、応力・変位が無限体内で一価関数であることから決定される。

２．３半無限体内の定常線熱源問題　前節の結果を踏まえて、関数Φを次式のように設定する。

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{8}\{A_{kk}f_{kk}(z_{kk}) + \sum_{s} A_{ks}f_{ks}(z_{ks})\}. \qquad (18)$$

このΦを用いると応力・変位成分は次のようになる。

$$\sigma_x = \sum_{k=1}^{8}\mu_k^2 G_{ks}^I(B_k, B_{ks}), \quad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

$$\left.\begin{aligned} u_x = &\sum_{k=1}^{8}\{p_{xk}G_{ks}(B_k, B_{ks}) + q_{xk}G_{ks}(C_k, C_{ks})\}\\ &+24\alpha_{11}(\beta_{11}\beta_{55} - \beta_{15}^2)\sum_{k=7}^{8}\hat{\ell}(\mu_k)G_{ks}(A_k, A_{ks}) + u_x^0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots(20)$$

ここに、

$$\left.\begin{aligned} &f_{ks}(z_{ks}) = -\frac{1}{30}z_{ks}^6(\ln\frac{z_{ks}}{d_k} - \frac{49}{20}),\\ &f_{kk}(z_{kk}) = [f_{kk}(z_{ks})]_{s=k},\\ &G_{ks}(A_k, A_{ks}) = A_k z_{kk}(\ln\frac{z_{kk}}{d_k} - 1)\\ &\qquad\qquad + \sum_{s} A_{ks}z_{ks}\ln(\frac{z_{ks}}{d_s} - 1),\\ &G_{ks}^I(A_k, A_{ks}) = A_k\ln\frac{z_{kk}}{d_k} + \sum_{s} A_{ks}z_{ks}\ln\frac{z_{ks}}{d_s},\\ &z_{ks} = (x + \mu_k y) - (x_0 + \mu_s y_0) = z_k - z_s^0,\\ &z_{kk} = [z_{ks}]_{s=k} = z_k - z_k^0\\ &z_0(= x_0 + iy_0)：\text{熱源作用位置} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

$G_{ks}(C_k, C_{ks})$ 等は式(21)中の定数を適宜置き換えてやればよい。また、式中の s に関する総和は、次のようにとるものとする。

$$\left.\begin{aligned} &k = 1, 3, 5 \text{ のとき、} s = 2, 4, 6, 8 \text{ の4つの和}\\ &k = 2, 4, 6 \text{ のとき、} s = 1, 3, 5, 7 \text{ の4つの和} \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

２．４　半無限体の表面境界条件

統一的に取り扱うために、次のような境界条件を設定する。

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_y = c_0 u_{y,x}, \quad &\tau_{xy} = c_1 u_{x,x},\\ &\tau_{yz} = c_2 u_{z,x}, \quad &T + h_0 T_{,y} = 0. \end{aligned}\right\} \quad at \quad y = 0. \qquad (23)$$

これらを次のような特殊化を行えば、上記の境界条件を表現できる。

$$\left.\begin{aligned} &(I)\ \text{自由境界の場合}：c_0 = c_1 = c_2 = 0,\\ &(II)\ \text{固定境界の場合}：c_0, c_1, c_2 \to \infty,\\ &(III)\ \text{すべり境界（その１）の場合}：\\ &\qquad\qquad c_1 = c_2 = 0, c_0 \to \infty,\\ &(IV)\ \text{すべり境界（その２）の場合}: c_1, c_2 \to \infty. \end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$\left.\begin{aligned} &(A)\ \text{等温境界の場合}：h_0 = 0,\\ &(B)\ \text{断熱境界の場合}：h_0 \to \infty \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots(25)$$

以上の条件よりすべての未知係数が決定でき、式(19)および(20)より、それぞれ応力・変位が得られる。なお、式中のパラメータを有限値に設定することにより、上記境界条件の中間的な状態についても表現できる。

数値計算の結果および考察は、当日発表する予定である。