

III-576 分岐による軟化を考慮した有限要素法による変形解析

福井大学大学院 学生員 船戸慶輔

はじめに

本文は、弾塑性変形における幾何学的適合条件を用いた分岐変形解析より、ひずみ軟化の様相が得られることを示している。分岐後の変形の追跡は、有限要素内におけるひずみの内挿関数に分岐モードを加え合わせることによって行い、分岐変形解析によるひずみの局所化の有限要素解析手法の一つを示す。

材料の構成モデル

ここで用いる材料の弾塑性構成モデルでは、材料変形におけるダイレタンシーの効果を考慮し、降伏関数および塑性ポテンシャルに Druker-Prager の基準を用いている。また、ひずみ履歴とともに内部摩擦角 ϕ が

$$\sin \phi = \begin{cases} \sin \phi_i + \frac{2(\sin \phi_f - \sin \phi_i) \sqrt{\bar{\epsilon}_c^p} \sqrt{\kappa}}{\kappa + \bar{\epsilon}_c^p} & \kappa < \bar{\epsilon}_c^p \\ \sin \phi_f & \kappa \geq \bar{\epsilon}_c^p \end{cases} \quad (1)$$

と変化するように与えた⁽¹⁾。ここに、 ϕ_i は初期内部摩擦角、 ϕ_f は有効塑性ひずみが $\bar{\epsilon}_c^p$ に達したときの終局の内部摩擦角である。 κ は硬化パラメータであり、有効塑性ひずみ増分 $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ の積分値として定義される。

分岐点は Thomas の幾何学的適合条件⁽²⁾を用いることにより、

$$\det \mathbf{A} = \det(\mathbf{nDn}) = 0 \quad (2)$$

の条件を満足する位置にて求められる⁽³⁾。ここで考慮するのは材料の問題としての不均一変形でなく、解析領域に対する構造的問題としての分岐条件である。そこで、分岐点におけるひずみのジャンプ量を生成する不連続面(法線ベクトル $\mathbf{n}$)によって分割される領域について、その応力-ひずみ関係 $\mathbf{D}$ に変化はないものとした。

分岐後の変形解析

有限要素法を用いて分岐後の変形を追跡するうえで、分岐によって引き起こされるひずみの不連続量 $\mathbf{g}$ によるモードを通常の要素に用いられる内挿関数 $\mathbf{N}$ に付加するものとし、要素内のひずみベクトルを表すのに用いる内挿関数を次のように定めた⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_a \frac{\partial \mathbf{N}_a}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{u}_a + \min_b \frac{\partial \mathbf{M}_b}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{g}_b \\ \mathbf{M} &= \begin{cases} \lambda \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \xi) & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \xi) > 0 \\ -(1 - \lambda) \mathbf{m} \cdot \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \xi) & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \xi) < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\mathbf{m}$ は不連続量を表す単位ベクトルであり、 ξ は分岐判定位置である。この内挿関数により、分岐した要素は非適合要素となるが、 λ は要素の全領域に対する不連続面によって分割された領域の比として定義することにより、patch test を満足する。式(2)の分岐判定は各要素の重心においてなされるものとし、式(3)の右辺第二項は、分岐点において求められるベクトル量 $\mathbf{n}$ および $\mathbf{m}$ のうち最小のひずみエネルギーを有するモードを選んで用いることを示す。

数値解析結果

一要素試験：分岐後の要素の挙動を把握するために、一要素の圧縮試験を行った。解析には接線剛性法による増分手法を用い、軟化に対応するために載荷面における変位を制御するようにして数値解析を行った。結果を図1、図2に示す。ここで用いた材料定数は、ヤング率 $E = 1000 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、ダイレタンシー角 $\psi = 0^\circ$ 、粘着力 $c = 2 \text{ kg/cm}^2$ である。A は $\phi_i = 10^\circ, \phi_f = 30^\circ$ の場合について、B は $\phi_i = \phi_f = 10^\circ$ の場合についてそれぞれ表している。両結果において、分岐後の応力-ひずみ曲線が軟化の傾向を示している。図1より、A の材料では分岐直後から通常の応力-ひずみ曲線に比べて応力が低下し、ピークをむかえた後で

軟化を示している。 B の材料では、分岐後の応力値はほとんど変化していない。また、図 2. に示すように、分岐前には現れないせん断応力およびせん断ひずみが、分岐点以降において観察される。

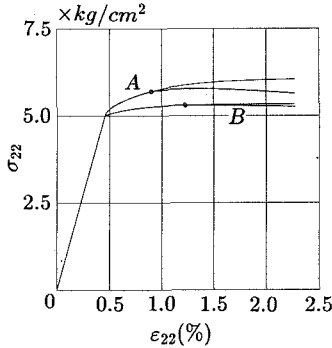


図 1. 軸応力－軸ひずみ曲線
(一要素試験)

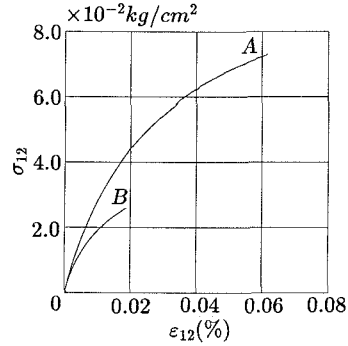


図 2. せん断応力－せん断ひずみ曲線
(一要素試験)

一軸圧縮試験：ここで用いた有限要素解析手法の例として、一軸載荷試験の結果を図 3., 図 4. に示す。図に示した解析領域の右下端要素には一要素試験で用いた B の材料を、他の領域には A の材料を用いている。載荷条件として左端面に強制変位を与えている。 B の要素の付近と対角付近の自由面において分岐の発生がみられ、変形の進行にともない、徐々に広がっていく。この部分のひずみは、他の要素の約 2～5 倍になっており、ひずみの局所化の様相を示しているといえる。しかし、一次近似の内挿関数を用いてジャンプを要素に平滑化しているため、比較的広い範囲に分岐要素が分布している。

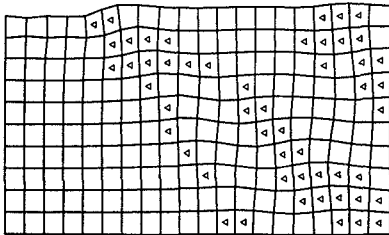


図 3. 変位および分岐要素
 $u/u_y = 1.19$

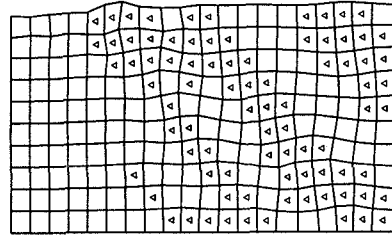


図 4. 変位および分岐要素
 $u/u_y = 1.315$

おわりに

分岐後の構成関係を変化させない場合、分岐してからの変形は軟化を伴うことを示した。分岐した要素に用いる内挿関数に対しては、より局所化を表現しやすいように考慮する必要がある。

謝辞

数値解析結果の検討に幾多の助言を下された福井大学工学部 福井卓雄講師に、紙上にてあらためて感謝の意を表します。

参考文献

- (1) R. de Borst, "Bifurcation in finite element models with a non-associated flow law" *Int. J. Num. Meth. Geomech.* vol.12, pp.99-116 (1988)
- (2) R. Hill, "Discontinuity relations in mechanics of solids" in: *Progress in Solid Mechanics II*, Eds: I.N. Sneddon, R. Hill, North-Holland, Amsterdam, pp.265-276 (1961)
- (3) D. Bigoni and T. Hueckel, "A note on strain localization for a class of non-associative plasticity rules" *Ingenieur-Archiv* vol.60, pp.491-499 (1990)
- (4) Y. Leroy and M. Ortiz, "Finite element analysis of strain localization in frictional materials" *Int. J. Num. Meth. Geomech.* vol.13, pp.53-74 (1989)