

III-575

Cosserat 連続体とみなした地盤の連成解析

京都大学農学部
同上正会員 ○村 上 章
正会員 長谷川 高士

1 はじめに

地盤の局所変形や分岐を解析するのに、偶応力を考慮した Cosserat 連続体¹⁾の構成関係がしばしば用いられるようになってきた(例えば、Mühlhaus²⁾, de Borst³⁾, Willam⁴⁾ and Tejchman⁵⁾)。また、小田⁶⁾によってせん断帯形成時の偶応力の役割も指摘されている。

こうした理論を適用するにあたり、偶応力の効果が顕著に現われる適切な例題を取上げることが肝要であろう。例えば、岩盤のブロックせん断試験やロックせん断試験といった、原位置試験の結果に対するモーメントの影響を評価するのに有効であるかも知れない。ここではまず、偶応力の有無が地盤の変形や間隙水圧挙動に与える影響を調べるために、飽和地盤を微小変形理論の枠組みにおける Cosserat 連続体として扱うときの有限要素定式化を示すとともに、盛土による局部載荷の例を検討する。

2 有限要素定式化

支配式は右のようである。(1), (3) 式に対する弱形式を得るために、(1) 式に任意関数 ($\forall \delta u_i$; $\delta u_i = 0$ on S_u)、および (3) 式に任意関数 ($\forall \delta \phi_i$; $\delta \phi_i = 0$ on S_ϕ) を乗じて、その両方を領域 V で積分する。通常の連続体ではモーメントが作用しないので、 $e_{ijk}\sigma_{jk} = 0$ を (3) 式のかわりに (1) 式へ代入することとなる。有効応力の原理や Kinematics、さらには境界条件を代入するとともに、Gauss の発散定理を用いて、つりあいに対する弱形式 (12) を得る。

一方、(6) 式に対する弱形式を得るために、上と同様に (6) 式に任意関数 ($\forall \delta h$; $\delta h = 0$ on S_h) を乗じて、領域 V で積分する。境界条件を代入するとともに、Gauss の発散定理により、連続条件に対する弱形式 (13) を得る。

これらの弱形式を連立させて、内挿関数近似と時間差分により離散化すればよい。このような混合問題における内挿は、解が適合するように変位や回転について一次とし、間隙水圧は要素に与えた。間隙水圧に関する離散方法は赤井・田村⁷⁾によった。解析プログラムは、飯塚・太田によるプログラム DACSAR⁸⁾を修

つりあい式

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

有効応力の原理

$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - p_w \delta_{ij} \quad (2)$$

モーメントのつりあい

$$\mu_{ij,j} + \nu_i + e_{ijk}\sigma_{jk} \quad \text{in } V \quad (3)$$

Kinematics

$$\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + e_{ijk}\phi_k^c, \quad \kappa_{ij} = \phi_{i,j}^c \quad (4)$$

構成関係

$$\sigma'_{ij} = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad \mu_{ij} = \mu_l^2 \kappa_{ij} \quad (5)$$

連続条件

$$\dot{\varepsilon}_{kk} = -v_{i,i} \quad (6)$$

Darcy 則

$$v_i = -kh_{,i}, \quad h = p_w/\gamma_w + \Omega \quad (7)$$

境界条件

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_u, \quad \phi_i^c = \bar{\phi}_i^c \quad \text{on } S_\phi \quad (8)$$

$$\sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{on } S_\sigma, \quad \mu_{ij}n_j = \bar{m}_i \quad \text{on } S_m \quad (9)$$

$$h = \bar{h} \quad \text{on } S_h, \quad v_i = \bar{v}_i \quad \text{on } S_v \quad (10)$$

初期条件

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}|_{t=0} \quad \text{in } V, \quad h = h|_{t=0} \quad \text{in } V \quad (11)$$

ここに、 σ_{ij} : Cauchy 応力、 σ'_{ij} : 有効応力、 b_i : 物体力、 p_w : 間隙水圧、 δ_{ij} : Kröner デルタ、 μ_{ij} : 偶応力、 ν_i : 物体モーメント、 e_{ijk} : 交代記号、 ε_{ij} : ひずみ、 ϕ_i^c : Cosserat 回転、 κ_{ij} : 曲率、 μ_c : Cosserat せん断係数、 D_{ijkl} : 弾性係数、 l_c : 特性長さ、 γ_w : 水の単位重量、 k : 透水係数、 h : 全水頭、 Ω : 位置水頭、 n_i : 法線ベクトル。

正しており、いくつかの numerical scheme が共通となる。

3 数値解析

図2にあるような局部荷重による地盤の変形を考える。表1に解析定数を示す。図3は16日後における変形挙動であり、図4はそのときの偶応力 (μ_{i3}) の分布を示す。偶応力は法尻付近で正負の符号を逆転させ、ピークをもっている。間隙水圧挙動は通常の連続体による結果とほとんど変わらない。

$$\int_V \sigma'_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV + \int_V \mu_{ij} \delta \kappa_{ij} dV = \int_V p_w \delta \epsilon_{kk} dV + \int_V b_i \delta u_i dV + \int_V \nu_i \delta \phi_i dV + \int_{S_\sigma} \bar{t}_i \delta u_i dS + \int_{S_m} \bar{m}_i \delta \phi_i dS. \quad (12)$$

$$\int_V \dot{\epsilon}_{kk} \delta h dV - \int_V v_i \delta h_{,i} dV + \int_{S_v} v_i n_i \delta h dS = 0. \quad (13)$$

↓

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_v \\ \mathbf{K}_v^T & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{u}^N \\ \gamma_w \mathbf{h}^M|_{t+\Delta t} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{F} - \mathbf{K}_v \gamma_w \mathbf{h}^M|_t \\ \Delta \mathbf{q} + (1-\theta) \mathbf{A} \gamma_w \mathbf{h}^M|_t \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

ただし、 $\Delta \mathbf{u} = \{u_x, u_y, \phi^c\}^T$ 。

表 1: 解析定数

$E(kPa)$	ν	$\mu_c(kPa)$	$l_c(cm)$	$k(cm/day)$
996.4	0.25	398.6	0.5	0.0001

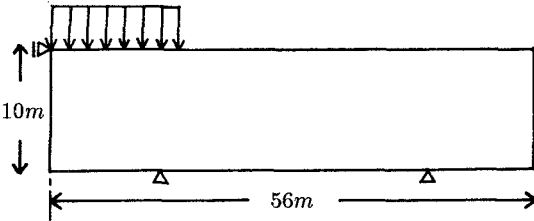


図2 解析モデル

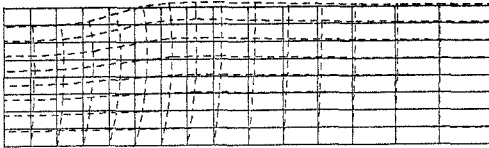


図3 変形挙動

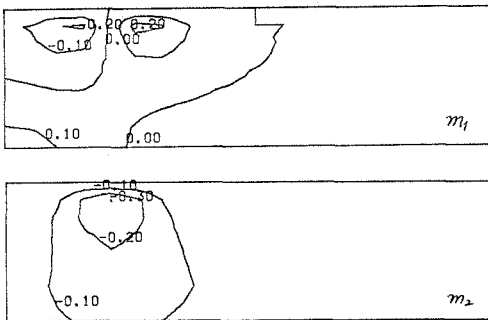


図4 偶応力の分布 ($\times 10^{-4} kPa$)

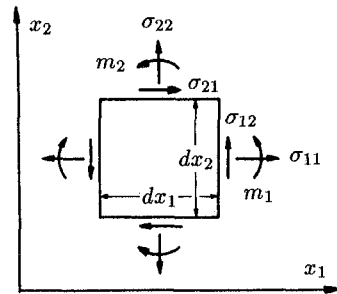
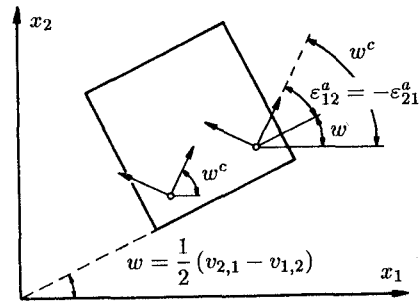


図1 Cosserat 連続体の応力と回転⁵⁾

参考文献: 1) E. Cosserat and F. Cosserat: *Théorie des corps déformables*, Herman et fils, Paris (1909); 2) H.-B. Mühlhaus and I. Vardoulakis: The thickness of shear bands in granular materials, *Géotechnique* 37: 271-283 (1987); 3) R. de Borst: Simulation of strain localisation: A reappraisal of the Cosserat continuum, *Engrg. Comput.* 8: 317-332 (1991); 4) K.J. Willam: Experimental and computational aspects of concrete fracture, *Proc. Int. Conf. Computer Aided Analysis & Design of Concrete Structures* (eds. Damjanic, F. et al.), 1: 33-70 (1984); 5) J. Tejchman: Scherzonenbildung und Verspannungseffekte in Granulaten unter Berücksichtigung von Korndrehungen, Ph.D. thesis, University of Karlsruhe (1989); 6) 小田匡寛: せん断帯形成と偶応力, 第42回応用力学連合講演予稿集, 247-248 (1993); 7) 赤井浩一・田村 武: 弾塑性構成式による多次元圧密の数値解析, 土木学会論文報告集, (269): 95-104 (1978); 8) A. Iizuka and H. Ohta: A determination procedure of input parameters in elasto-plastic finite element analysis, *Soils and Foundations*, 27(3): 71-87 (1987).