

III-569

ミンドリンモデルで表現された多球体の変形解析

武蔵工業大学大学院 学生員 ○喜多 孝行

(株)パスコ

五味三江子

武蔵工業大学土木工学科 正会員 片田 敏行

1. はじめに

本研究は、連続体を変形する球で表されるミンドリンモデルより成る多球体でモデル化し、その応力～ひずみ関係を数値解析で明らかにすることを試みるものである。個別要素法とは異なりバネという概念から離れて、2つの弾性球間の挙動を定式化しているミンドリン理論を用いた。このモデルでは複数の球の集合体から成る多球体において、個々の2球間の接触面ではミンドリン式が成り立つとした。解析例として81球より成る多球体のせん断変形の解析を行う。

2. ミンドリン理論の概要

Hertz(1927)¹⁾は均質な2球が接触し両球の中心を結ぶ方向に法線方向力Nという力が働くときの接触半径と接触深さを理論的に求めている。このHertz理論を発展させて、せん断力Tを加味した球の挙動はミンドリンにより理論的に考察されている(1951)(図-1)²⁾。ミンドリンは接触面の周辺部の円環状の部分ですべりが起こると考え、この領域でのせん断応力 τ がCoulombの摩擦法則により垂直応力 σ に比例すると仮定している。骨格曲線と履歴曲線を以下に示す。法線方向力N=一定・接線方向力T=変化の場合⁴⁾

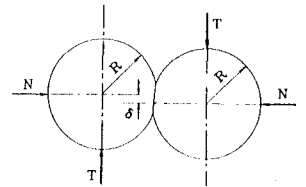


図-1 せん断力による変形

骨格曲線

$$\text{載荷側} \quad \delta_i = -\frac{3(2-\nu)fN}{16\mu a} \left[1 - \left(1 - \frac{T}{fN} \right)^{\frac{2}{3}} \right]$$

$$(1) \quad \text{除荷側} \quad \delta_d = -\frac{3(2-\nu)fN}{16\mu a} \left[1 - \left(1 + \frac{T}{fN} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \quad (2)$$

履歴曲線

$$\text{載荷側} \quad \delta_i' = -\frac{3(2-\nu)fN}{16\mu a} \left[2 \left(1 - \frac{T^* + T}{2fN} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(1 - \frac{T^*}{fN} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right]$$

$$(3) \quad \text{除荷側} \quad \delta_d' = -\frac{3(2-\nu)fN}{16\mu a} \left[2 \left(1 - \frac{T^* - T}{2fN} \right)^{\frac{2}{3}} - \left(1 - \frac{T^*}{fN} \right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right] \quad (4)$$

ただし、f:摩擦係数、a:接触半径、 δ :相対変位、 ν :ポアソン比、 μ :せん断弾性係数、 T^* :Tの反転値

法線方向力N=変化・接線方向力T=変化の場合³⁾

この場合、2球間に働くせん断力および変位の変化はN、Tの相対的变化の関数となる。ミンドリンの定式化では相対変位 δ とN、Tの関係は全部で14個の関係式に分けて表される。以下にN、Tともに増加する場合の骨格曲線、履歴曲線を表す式を示す。

骨格曲線

N増加,T増加

$$0 \leq \frac{dN}{dT} \leq \frac{1}{f} \text{ のとき} \quad \Delta\delta(T) = -\frac{2-\nu}{8\mu a} \left[f\Delta N + \left(1 - \frac{T}{f(N+\Delta N)} \right)^{-\frac{1}{2}} (\Delta T - f\Delta N) \right]$$

(5)

 $\frac{dN}{dT} \geq \frac{1}{f}$ のとき

$$\Delta\delta(T) = -\frac{2-\nu}{8\mu a} \Delta T$$

(6)

履歴曲線

N増加,T増加

$$\frac{dN}{dT} > 0 \text{ のとき} \quad \Delta\delta(T) = -\frac{2-\nu}{8\mu a_1} f\Delta N - \frac{2-\nu}{8\mu c_1} (f\Delta N - \Delta T)$$

(7)

3. 変形解析の数値解析の手順

上式で与えられる2球間の力～変形の関係に基づく多球体の力の伝達計算は以下のように行った。複数の球から成る多球体について個々の2球間の接触面に着目して、1球の移動に伴う相対変位から接触面に働く力を求める。この接触力から他球の運動方程式を求め、これを時間領域で数値積分し、その変位を算出する。

この際に2球間の接触深さ、相対変位を観測データとしてミンドリン式を接触面上での接線方向力 T すなわちせん断力の1変数の式とし接触力を算出する。しかし、 T と δ の変化は初期の荷重履歴および N と T の相対的变化の瞬間的な変動の関数となっている。すなわち球間の T と摩擦力との大小関係及び T と N の増減による符号の組み合わせによる影響の場合分けが必要となる。

4. 数値解析例—せん断変形問題

数値解析例として、81球より成る6角形配置の多球体(図-2)の簡単な静的せん断変形の数値解析を行った。解析モデルを表-1、2(表-1:寸法、表-2:パラメータ)に示す。解析結果を図-3に示す。解析ではせん断ひずみ γ を徐々に載荷し、そのときのせん断応力 τ を求めた。せん断変形にともなう垂直方向ひずみが生じないように制御した。数値解析の結果(図-4)を見ると、せん断面で球どうし乗り越えるとき、 τ の値が大きくなる。最初の乗り越えの時($\gamma=4 \times 10^{-2}$)のとき、最も大きな値を示す。乗り越えるたびに、せん断面の面積が小さくなるのでせん断応力も徐々に小さくなっていく。

5. あとがき

このモデルでは一般的な地盤パラメータである土のせん断剛性率、ポアソン比および摩擦係数を用いて解析が行われるところに特徴がある。

謝 辞 本研究を行うに当たり、当初よりProf.KAGAWA (Wayne State University, USA)より種々の有益な助言を頂いております。記して謝意を表する次第です。

参考文献

1. Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N.; Theory of Elasticity, Third Edition, pp. 409-414, McGraw-Hill International editions, Engineering Mechanics Series.
2. Mindlin, R. D., Mason, W. P., Osmer, T. F. and Deresiewicz, H.; Effects of an Oscillating Tangential Force on the Contact Surface of Elastic Spheres, Proceedings of the First U. S. National Congress of Applied Mechanics, 1951, pp. 203-208.
3. Mindlin, R. D. and Deresiewicz, H.; Elastic Spheres in Contact under Varying Oblique Forces, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, vol. 75, 1953, pp. 327-344.
4. Mindlin, R. D.; Compliance of Elastic Bodies in Contact, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, vol. 71, 1949, pp. 259-268.
5. Duffy, J. and Mindlin, R. D.; Stress-Strain Relations and Vibrations of a Granular Medium, Journal of Applied Mechanics, 1957, pp. 585-593.

表-1 解析モデルの寸法

高さ	3.1 cm
幅	6.0 cm
奥行き	0.5 cm (1球分)
球半径	0.25 cm
球の配置	6角形配置

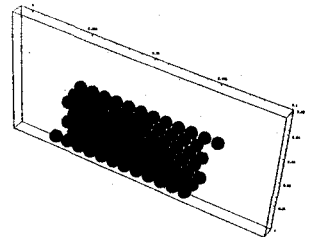
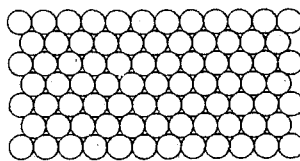


図-2 解析に用いた多球体モデル 図-3 載荷後の変形状態

表-2 解析に用いた物性値

単位体積重量 ρ	2000 Kgf/m ³
最大静止摩擦係数	0.8
ポアソン比	0.40
せん断弾性係数 μ	1.5×10^7 Kgf/m ²
計算時間間隔 Δt	1.0×10^{-5} sec

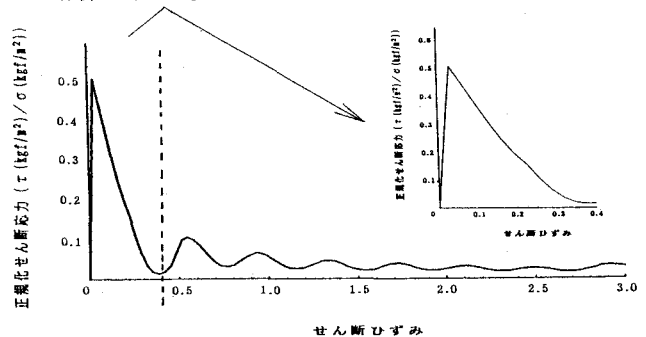


図-4 数値解析結果—多球体のせん断特性