

III-490

Iterated Linear Filter-Smoother を用いた透水係数の空間分布推定法

清水建設（株） 大崎研究室 正会員 奥野哲夫

1. はじめに

地下水問題において、透水係数の空間分布を推定する手法として逆解析法の適用性が検討されている。著者らは拡張カルマンフィルタを用いて、地下水位や揚水量など多種類の観測データから透水係数の空間分布を推定する手法を提案した¹⁾。今回は、地下水位や揚水量などの観測データ数が時間軸上に限られた数しか存在しないことも勘案して、さらに推定精度が向上するよう改良を加えた手法（Iterated Linear Filter-Smoother）²⁾を示し、その妥当性を検討したので報告する。

2. 透水係数の空間分布推定法

不圧帯水層を対象とした拡張カルマンフィルタ（以下E.K.F.とする）による透水係数の空間分布推定法は参考文献1)に示しているので、ここでは概要のみ示す。不圧帯水層における非定常浸透流の方程式は、平面2次元状態を仮定して有限要素法で離散化すると次式のような非線形方程式となる。

$$h_{i+1}^1 = f_i^h(X_i) \quad (1) \quad q_{i+1}^2 = f_i^q(X_i) \quad (2)$$

ここで、 X_i は後述するように節点地下水位 h_i 、節点流量 q_i 、要素透水係数 K_i の常用対数値からなるベクトルであり、足文字 i は時間ステップを表わす。また、地下水位 h_i の肩文字1と節点流量 q_i の肩文字2はそれぞれ地下水位と節点流量に関する未知量を表わす。この非線形方程式は、 $i+1$ ステップの地下水位が i ステップの地下水位から繰り返し計算により求められた後、節点流量が求められる。

E.K.F.における状態方程式と観測方程式は、有限要素法による時間更新の式を用いて次式のように定義する。

$$X_{i+1} = f_i(X_i) + w_i \quad (3) \quad Y_i = G_i X_i + v_i \quad (4)$$

$$X_{i+1} \equiv \begin{Bmatrix} h_{i+1}^1 \\ L_{i+1} \\ q_{i+1}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_i^h(X_i) \\ L_i \\ f_i^q(X_i) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_i^h \\ L_i^L \\ w_i^q \end{Bmatrix} \quad (5) \quad Y_i \equiv \begin{Bmatrix} \tilde{h}_i^1 \\ \tilde{L}_i \\ \tilde{q}_i^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_i^h & 0 & 0 \\ 0 & G_i^L & 0 \\ 0 & 0 & G_i^q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_i \\ L_i \\ q_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_i^h \\ v_i^L \\ v_i^q \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここで X_i は状態ベクトル、 Y_i は観測ベクトル、 $\sim$ は観測量を示す。 w_i と v_i はそれぞれシステム誤差と観測誤差である。なお、システム誤差 w_i は地盤のモデル化、有限要素法による離散化、時間差分などによる誤差を表わす。また、 L_i は透水係数の常用対数値、 G_i は地下水位、透水係数、節点流量（揚水量）が観測される位置のみ対角成分が1で他の成分は0となるマトリクスである。

上記の設定では状態方程式のみ非線形となるが、一般にカルマンフィルタにおける状態方程式と観測方程式の非線形性は、テーラー展開により線形化することでE.K.F.として定式化できる。E.K.F.では状態ベクトルの時間更新において、状態遷移マトリクスとして $\partial f_i^h / \partial X_i$ 、 $\partial f_i^q / \partial X_i$ を求めて線形化するが、1ステップ内の線形化の誤差はそのステップ内では修正されず、時間ステップが進むにつれて新たな観測値を用いて逐次修正される。

実際には、地下水位や揚水量などの観測データ数が時間軸上に限られた数しか存在しないことを考えると、上記の非線形方程式を線形化することによる誤差を少なくして、少ない観測データでも推定精度を向上させ、安定した解を得ることが望まれる。このような1ステップ内での線形化の誤差を少なくするためには、局所繰り返し計算（Local Iteration）を行い、推定精度を向上させることが考えられる。この方法として、ここではIterated Linear Filter-Smoother²⁾

（以下I.L.F.S.とする）を適用する。推定問題においては、現在の観測量を用いて過去の状態量を推定することをスムージング、現在の状態量を推定することをフィルタリング、将来の状態量を推定することを予測と呼ぶ。I.L.F.S.では、 i ステップの観測量から i ステップの状態量を仮の値として推定（フィルタリング）したのち、これを用いて $i-1$ ステップの状態量を推定する（スムージング）。この $i-1$ ステップの状態量と i ステップの観測量から再度 i ステップの状態量を推定したものが、先の仮の値と等しくなるまで繰り返し計算を行う。ここで仮の値とするのは線形化の誤差が含まれるため、I.L.F.S.では状態方程式と観測方程式の両方の線形化の誤差が修正できる。なお、非線形方程式の線形化の誤差を修正する手法として繰り返し拡張カルマンフィルタがあるが、繰り返し拡張カルマンフィルタは観測方程式の非線形性のみに対処して修正を行う手法と言える。これら手法の詳細は参考文献2)を参照されたい。

3. 解析モデルと解析結果

E.K.F.とI.L.F.S.の2種類の推定法を用いて、同一の模擬観測データに対する逆解析結果を比較する。解析モデルは図-1に示すモデルで、600m×600mの平面2次元領域の中心位置から1200l/minの一定割合で揚水を行い、揚水中の地下水位を図に示す36点で観測する。また、この地盤の透水係数の空間分布モデルを図-2に示す。この空間分布モデルの作成方法は参考文献(1)と同様であり、有効空隙率は6%とした。このモデルを基に、揚水に伴う116日間の36点の地下水位の変動を非定常浸透流解析（250ステップ）で求め、この内の50ステップを模擬観測データとして、はじめに設定した透水係数の空間分布（図-2）をE.K.F.とI.L.F.S.の2種類の方法で推定した。なお、システム誤差や観測誤差は両手法とも同様に設定した。

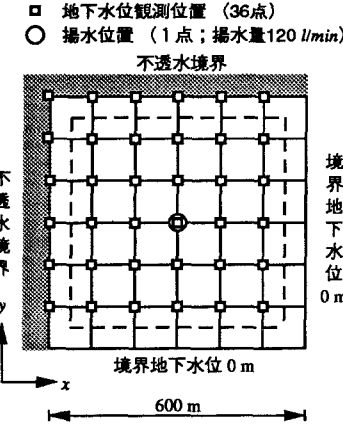


図-1 解析モデルと観測点配置

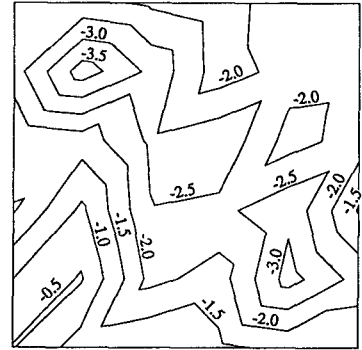


図-2 設定した透水係数の空間分布
（単位 cm/s の透水係数の常用対数値）

2種類の推定の過程で(7), (8)式から計算した平均的な残差 Em と推定誤差 Sm の経時変化を図-3, 4に示す。なお, (7), (8)式において K_i は設定した透水係数, $\hat{K}_i$ は推定された透水係数, n はパラメータ数（透水係数の数:36）である。これらの図より, I.L.F.S.の方が残差 Em の減少過程が安定しており, 推定誤差 Sm も比較的早く減少することがわかる。このことは, 時間軸上の観測データ数が限られている場合, これらのデータを有効に利用して, 推定精度を向上させることができることを示している。

$$Em = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\log_{10} \hat{K}_i - \log_{10} K_i)^2}{n}} \quad (7) \quad Sm = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \text{Var}(\log_{10} K_i)}{n}} \quad (8)$$

また, 最終的に求まった透水係数の推定値を図-5, 6に示すが, I.L.F.S.の方が全体的な傾向をよく捉えている。

4. おわりに

時間軸上に限られた数の観測データしかない場合を勘案して, I.L.F.S.を用いた透水係数の空間分布推定結果を示し, E.K.F.よりも推定精度を向上させることが可能な点を確認した。今後さらに詳細な検討を進める予定である。

参考文献

- 1) 奥野哲夫, 鈴木誠: 不圧地下水を対象とした拡張カルマンフィルタによる透水係数の空間分布推定法, 土木学会論文集, III-23 (掲載予定) 1993.
- 2) Yazwinski: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970.

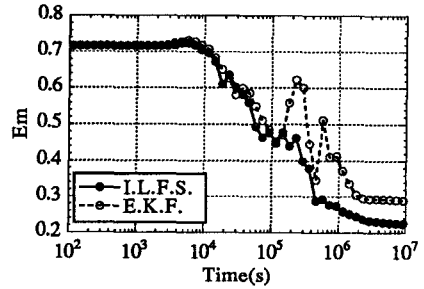


図-3 推定過程における Em の経時変化

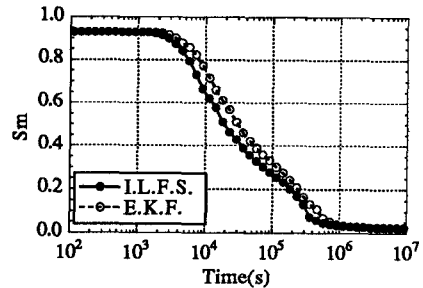


図-4 推定過程における Sm の経時変化

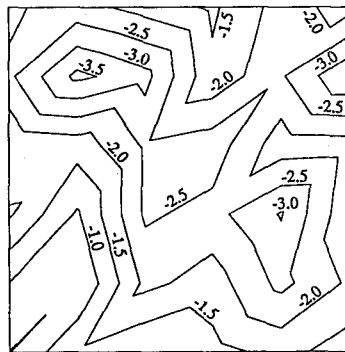


図-5 E.K.F.による透水係数の推定結果

（単位 cm/s の透水係数の常用対数値）

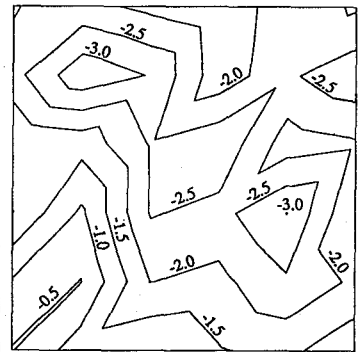


図-6 I.L.F.S.による透水係数の推定結果

（単位 cm/s の透水係数の常用対数値）