# III－408　粒状材料から金属材料まで適用可能な構成式

名古屋工業大学　学生会員　○孫　徳安
〃　　正 会 員　松岡　元

粒子間のボンドのない粒状体のような摩擦性材料(粘着力$c=0$、$\phi$材料)から、結晶構造による強力なボンドを持つ金属のような粘着性材料(内部摩擦角$\phi=0$、c材料)までの広範囲の工学材料に対する統一的な構成式(破壊規準を含む)を見い出すことは魅力ある研究テーマである。土のような粒状材料の変形・強度特性を統一的に説明するために、"空間滑動面(SMP)"の概念がすでに提案されており[1]、一方金属材料の変形・強度特性は正八面体面によって統一的に説明できるといわれている。ここでは、これらを両端とするc、$\phi$材料の構成式の構築を試みる。

## １．破壊規準

表-1の上段に示すように、２次元応力状態での破壊規準として、金属材料に対してはトレスカ規準($\tau_f=c$)が、土のような粒状材料に対してはモール・クーロン規準($\tau_f=\sigma\tan\phi$)が、中間のc、$\phi$材料に対しては一般化モール・クーロン規準($\tau_f=c+\sigma\tan\phi=(\sigma+\sigma_o)\tan\phi$；$\sigma_o=c\cdot\cot\phi$)がよく用いられる。容易にわかるように、一般化モール・クーロン規準はその両端にトレスカ規準($\phi=0$; $\sigma_o\to\infty$)とモール・クーロン規準($c=0$；$\sigma_o=0$)を含んでいる。一方、３次元応力状態での破壊規準としては、金属材料に対してはミーゼス規準($\tau_{oct}=\mathrm{const.}$)が、土のような粒状材料に対してはSMP規準($\tau_{SMP}=\sigma_{SMP}\tan\phi_1$)[1]が、両者の中間のc、$\phi$材料に対しては拡張SMP規準($\hat{\tau}_{SMP}=\hat{\sigma}_{SMP}\tan\phi_1$)が提案されている[2]。なお、拡張SMP規準は$\sigma_o=0$の時にSMP規準に$\sigma_o\to\infty$の時にミーゼス規準に一致することがわかっている[2]。

## ２．変形(塑性論)

1)論じる空間:

中井は$t_{ij}=\sigma_{ik}a_{kj}$($a_{kj}$はSMPの方向余弦)なる力学量を提案している[3]。ここでは、この概念をc、$\phi$材料に対して拡張するために、$\bar{t}_{ij}=\sigma_{ik}\hat{a}_{kj}$($\hat{a}_{kj}$は拡張SMPの方向余弦)を新たに定義する。そうすれば、$\sigma_o=0$の時には$\bar{t}_{ij}=t_{ij}=\sigma_{ik}a_{kj}$となり、$\sigma_o\to\infty$の時には$\bar{t}_{ij}=1/\sqrt{3}\sigma_{ij}$となる。なお、表-1からわかるように、$\hat{t}_{ij}=\hat{\sigma}_{ik}\hat{a}_{kj}$としている。

2)ダイレタンシー特性:

実験結果より、金属では$d\varepsilon_v{}^p=0$、粒状材料では$t_S/t_N=\lambda(-d\varepsilon_{SMP}{}^{*p}/d\gamma_{SMP}{}^{*p})+\mu$、c、$\phi$材料では$\hat{t}_S/\hat{t}_N=\hat{\lambda}(-d\hat{\varepsilon}_{SMP}{}^{*p}/d\hat{\gamma}_{SMP}{}^{*p})+\hat{\mu}$と仮定できる。なお、金属の場合と粒状材料の場合には、c、$\phi$材料の場合の式の特別な場合にあたっている。

3)塑性ポテンシャル関数gと降伏関数f:

金属の場合には$d\varepsilon_v=0$と直交則より$g=\tau_{oct}-c=0$という塑性ポテンシャルが得られる(ミーゼス降伏規準からも$f=g=\tau_{oct}-c=0$となる)。粒状材料の場合には、表-1のダイレタンシー特性と直交則より$g=\ln t_N+a\ln(1-bt_S/t_N)-c=0$。ここに、$a=\lambda/(\lambda-1)$、$b=(1-\lambda)/\mu$。なお、関連流れ則を仮定すれば、$f=g$となる。c、$\phi$材料の場合にも、同様に$g=\ln\hat{t}_N+a\ln(1-b\hat{t}_S/\hat{t}_N)-c=\ln(\bar{t}_N+\sigma_o)+a\ln(1-b\bar{t}_S/(\bar{t}_N+\sigma_o))-c=0$。ここに、$\bar{t}_N=\bar{t}_1\hat{a}_1+\bar{t}_2\hat{a}_2+\bar{t}_3\hat{a}_3$、$\bar{t}_S=\sqrt{(\bar{t}_1\hat{a}_2-\bar{t}_2\hat{a}_1)^2+(\bar{t}_2\hat{a}_3-\bar{t}_3\hat{a}_2)^2+(\bar{t}_3\hat{a}_1-\bar{t}_1\hat{a}_3)^2}$。

4)硬化パラメータ:

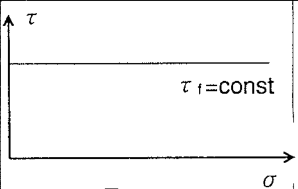
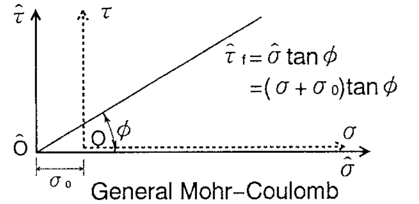
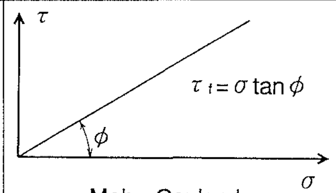
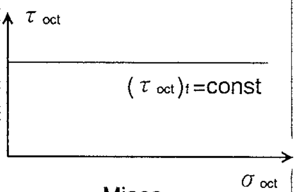
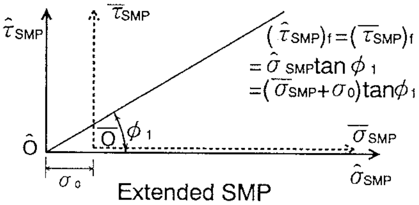
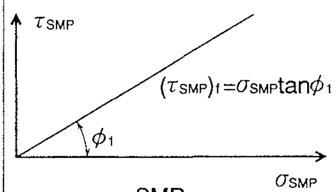
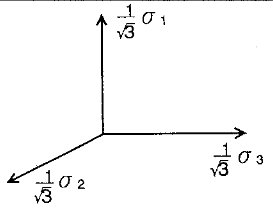
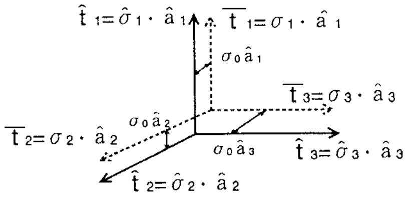
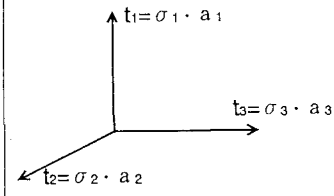
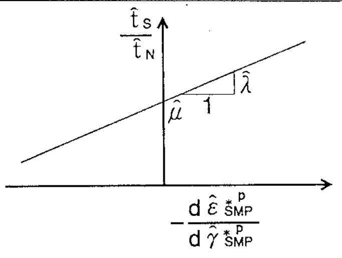
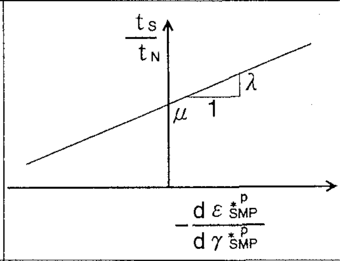
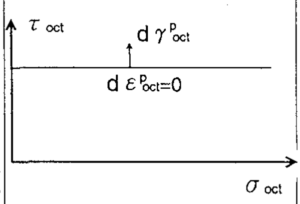
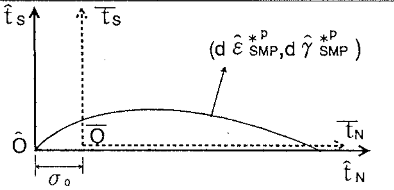
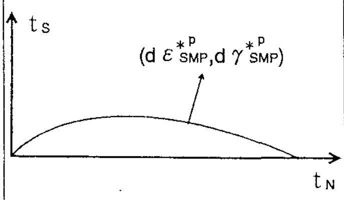
表-1中に示す通りである。なお、$\sigma_o=0$の時には$\bar{W}^{*p}=W^{*p}$、$\sigma_o\to\infty$の時には$\bar{W}^{*p}=W^p$となる。

5)流れ則:

表-1中に示すとおりである。なお、c、$\phi$材料の$d\varepsilon_{ij}{}^p$の式は、$\sigma_o=0$の時には粒状材料のものと、$\sigma_o\to\infty$の時には金属材料のものと一致する。

文献 1)Matsuoka and Nakai: Proc. of JSCE, 1974, No.232. pp.59-70. 2)Matsuoka et al.: S & F, 1990, No.2. pp.119-127. 3)Nakai: S & F, 1989, No.1, pp.119-137.

表－１　金属材料と粒状材料を両端に含むc、φ材料の構成式の成り立ち

| | | 金属材料（C>0, $\phi$=0） | 中間材料（C>0, $\phi$>0） | 粒状材料（C=0, $\phi$>0） |
|---|---|---|---|---|
| $\sigma_0$ | | $\sigma_0\to\infty$ | $0<\sigma_0<\infty$ | $\sigma_0=0$ |
| 破壊規準 | 2次元 |   Tresca |   General Mohr-Coulomb |   Mohr-Coulomb |
| | 3次元 |   Mises |   Extended SMP |   SMP |
| 変形（塑性論） | 論じる空間 |   $\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{ij}$ |   $\bar{t}_{ij}=\sigma_{ik}\cdot\hat{a}_{kj}$ |   $t_{ij}=\sigma_{ik}\cdot a_{kj}$ |
| | ダイレイタンシー特性 | $d\varepsilon^p_v=0$ |   |   |
| | 塑性ポテンシャル |   $f=g=\tau_{oct}-c=0$ |   $f=g=\ln\hat{t}_N+a\ln(1-b\,\hat{t}_s/\hat{t}_N)-c$ $=\ln(\bar{t}_N+\sigma_0)+a\ln(1-b\,\bar{t}_s/(\bar{t}_N+\sigma_0))-c=0$ |   $f=g=\ln t_N+a\ln(1-b\,t_s/t_N)-c=0$ |
| | 硬化パラメタ | $W^p=\int\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{ij}d\varepsilon^p_{ij}$ | $\overline{W}^{*p}=\int\bar{t}_{ij}d\varepsilon^p_{ij}$ | $W^{*p}=\int t_{ij}d\varepsilon^p_{ij}$ |
| | 流れ則 | $d\varepsilon^p_{ij}=\Lambda\frac{\partial g}{\partial(\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_{ij})}$ | $d\varepsilon^p_{ij}=\Lambda\frac{\partial g}{\partial(\bar{t}_{ij})}$ | $d\varepsilon^p_{ij}=\Lambda\frac{\partial g}{\partial(t_{ij})}$ |