

CS 44 非局所弾性理論による円孔周辺の応力分布について (一次元非局所弾性材料の場合)

清水建設 正 ○熊坂 博夫
山梨大学 正 平島 健一

1. はじめに

近年、材料の微視的構造による力学的な特性を考慮したマイクロメカニクス(微視力学)の地盤・岩盤への適用がみられる。この力学は連続体の概念を拡張して微視的な構造による影響を取り入れようとするものであり、その一つの拡張概念として"非局所性"と呼ばれる作用力の遠隔作用効果を考慮する理論がある。Eringenら⁽¹⁾は古典弾性理論では応力が発散するクラック先端の応力場に対し、上述の理論を用いる場合には有限な応力解が求められ、非局所性を考慮することの有効性について示している。しかしながら、クラック先端の応力場など比較的限られた境界条件での解に限定されており、非局所性を考慮することによる効果について十分に明らかになっていないといえない。ここでは、二次元平面ひずみの問題において一方向の非局所性を有する場合の円孔周辺の応力を閉じた型の解として誘導し、応力の特異性がない場合の非局所性の効果について検討を行ったので報告する。

2. 基礎方程式

非局所弾性理論における任意点 $\mathbf{x}$ の応力は次式のように定義される。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V C_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \varepsilon_{kl}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'). \quad (1)$$

ここに、 v は材料の体積であり、 $C_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ は古典弾性理論における剛性定数に相当し、 $\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}')$ は材料内の点 $\mathbf{x}'$ におけるひずみである。

式(1)より、点 $\mathbf{x}$ における応力はその点のひずみのみで決まるのではなく、材料内の全てのひずみの影響を受けることを表している。

本報告ではEringenらが用いた非局所線形弾性体に関する次式の関係を用いる。

$$\left. \begin{aligned} C_{ijkl}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') C'_{ijkl}, \\ C'_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu \delta_{il} \delta_{jk}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 C'_{ijkl} 、 μ 、 λ はそれぞれ古典弾性理論の剛性定数とラーメの定数である。また、 $\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ は非局所係数と呼ばれ遠隔にあるひずみの影響の程度を示す関数である。式(2)の関係を式(1)に代入すると次式が

得られる。

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \tau_{ij}(\mathbf{x}') dv(\mathbf{x}'). \quad (3)$$

ここに、 τ_{ij} は古典弾性理論の応力である。

上式より非局所線形弾性体の任意点 $\mathbf{x}$ の応力は材料内の古典弾性理論で求まる応力と非局所係数 α との積による領域積分から得られることがわかる。

3. 円孔周辺の応力解

本論文では、座標系 (x_1, x_2) を用い x_1 軸方向に非局所性を有する材料を対象とし具体的に非局所係数 α が次式の三角形分布を仮定した場合の等方圧縮応力下における円孔周辺の応力解を求める。

$$\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{cases} \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x'_1 - x_1|}{a} \right), & |x'_1 - x_1| \leq a, \\ 0, & |x'_1 - x_1| \geq a. \end{cases} \quad (4)$$

ここに、 a は材料の微視的構造の代表寸法である。(例えば、格子動力学では原子間距離となる。)

前節の式(3)より任意点 $\mathbf{x}$ の応力は材料内の古典弾性理論から求まる応力と非局所係数 α との積による領域積分により得られる。したがって、古典弾性理論の応力解と式(4)で示される非局所係数 α の関係を式(3)に代入すると式(5)が得られる。

$$\sigma_{ij} = \frac{P}{a} \int_{\Gamma} \left(1 - \frac{|x_1 - x'_1|}{a} \right) \left\{ \delta_{ij} \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2} \right) - 2 \frac{x'_i x'_j}{r^4} \right\} dx'_1. \quad (5)$$

ここに、 P は等方荷重、 R_0 は円孔の半径、 Γ は線積分領域、 $r^2 = x_1'^2 + x_2'^2$ 、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

式(5)において座標位置によっては線積分領域(距離)が異なることを考慮して積分を実行すると円孔周辺の応力解が得られる。すなわち、線積分領域が円孔と交差しない場合は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= P - \frac{P}{2} \frac{R_0^2}{a^2} \ln \left[\frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{\{(x_1 + a)^2 + x_2^2\} \{(x_1 - a)^2 + x_2^2\}} \right], \\ \sigma_{22} &= P + \frac{P}{2} \frac{R_0^2}{a^2} \ln \left[\frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{\{(x_1 + a)^2 + x_2^2\} \{(x_1 - a)^2 + x_2^2\}} \right], \\ \sigma_{12} &= -\frac{P R_0^2}{a^2} \left[2 \arctan \left(\frac{x_1}{x_2} \right) - \arctan \left(\frac{x_1 + a}{x_2} \right) - \arctan \left(\frac{x_1 - a}{x_2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

線積分領域が円孔と交差する領域では次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} &= P \left[1 + \frac{x_2^2 - R_0^2 + (x_1 - a) \sqrt{R_0^2 - x_2^2}}{2 a^2} \ln \left[\frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{R_0^2 \{(x_1 + a)^2 + x_2^2\}} \right] \right] \\ \sigma_{22} &= P \left[1 - \frac{x_2^2 - R_0^2 + (x_1 - a) \sqrt{R_0^2 - x_2^2}}{2 a^2} \ln \left[\frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{R_0^2 \{(x_1 + a)^2 + x_2^2\}} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_0^2}{2 a^2} \ln \left[\frac{(x_1^2 + x_2^2)^2}{R_0^2 \{(x_1 + a)^2 + x_2^2\}} \right] \right] \\ \sigma_{12} &= \frac{P}{a^2} \left[x_2 (x_1 - a - \sqrt{R_0^2 - x_2^2}) \right. \\ &\quad \left. + R_0^2 \left\{ \arctan \left(\frac{x_1 + a}{x_2} \right) + \arctan \left(\frac{\sqrt{R_0^2 - x_2^2}}{x_2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \arctan \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

4. 計算例と考察

最大主応力（ σ_{θ}/P ），最小主応力（ σ_r/P ）の円孔周辺のコンター分布を図-1に示す。また、 x_1, x_2 軸上の（ r 方向の）に対するそれぞれの応力値の変化を図-2, 3に示す。

図より古典弾性理論の応力分布が同心円状となるのとは異なり、 x_1, x_2 軸方向における応力分布に相違がある。これは x_1 軸方向への非局所性を考慮したことによる効果である。

図-2に示されるように非局所性の方向と直交する応力分布の場合は古典弾性理論の分布に近いが値はやや低くなる。一方、図-3の非局所性の方向と一致する場合は応力分布が古典弾性理論の分布と異り孔壁より内部にピークをもつ形状となる。このピークは図に示されるように非局所性の定数 a により変化し、 a が大きくなるに従いピークの応力値は低下し、ピーク点は内部に移動する。これは非局所性の遠隔作用性の効果の一つであると考えられる。

また、岩盤空洞周辺の応力分布として考えると図-1の応力コンターおよび図-3は空洞周辺の応力は低下領域と捉えることができる。すなわち、非局所性を考慮することにより弾性解析の範疇で緩み域等が表現できることを意味している。

参考文献 (1) Eringen, A.C, Speziale, C.G and Kim, B.S., J.Mech.Phys. Solids, 25,(1977), 339.

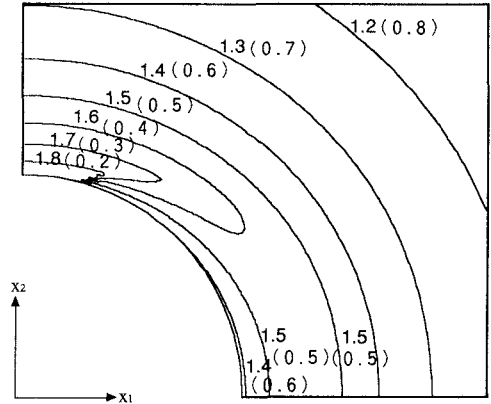


図-1 最大主応力（ σ_{θ}/P ）と最小主応力（ σ_r/P ）のコンター図（数値はカッコ内が最小主応力）

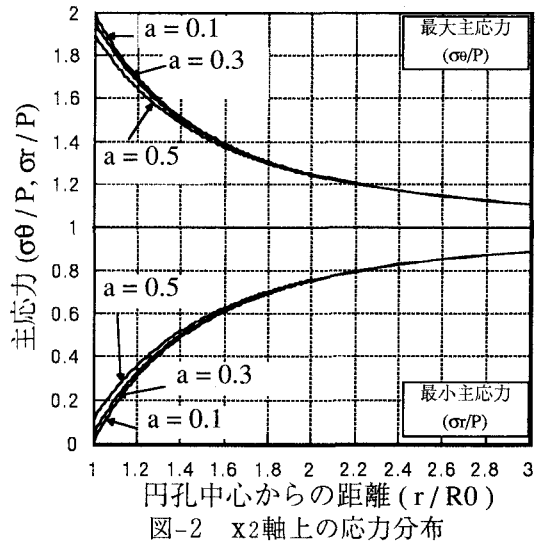


図-2 x_2 軸上の応力分布

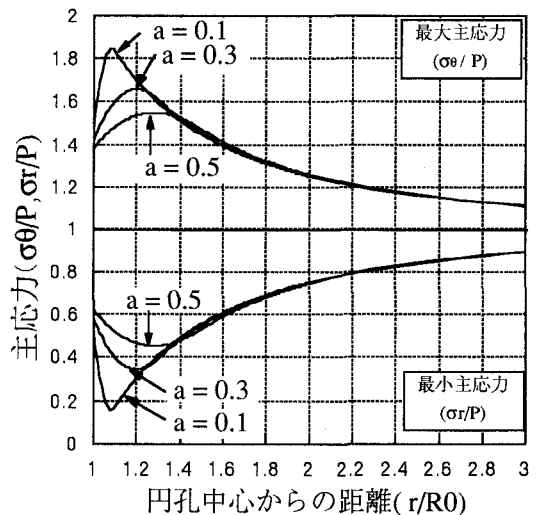


図-3 x_1 軸上の応力分布