

日本工営 正 員 ○小林正人
 東北大学 正 員 岸野佑次

1. まえがき 材料の構成則理論として塑性論は最も基本となるものであるが、塑性ポテンシャル等、必ずしも物理的意味の明確でない概念が用いられている。ここでは、材料内部の散逸構造を反映させることの可能な散逸関数に基づいて構成則を誘導する方法¹⁾を示す。従来、散逸関数に基づく構成則理論として、包絡定理により流れ則を定める試み²⁾等があるが、本理論はより力学的意味をもつ最大散逸仕事速度の原理³⁾を用い、また、硬化・軟化も考慮可能な理論構成を行った。具体例として、地盤の基本モデルである粒状体について、粒子間滑りを単純化して定めた散逸関数に基づく構成則の説明を行う。

2. 構成則理論の構成

1) 散逸関数 散逸関数は塑性論においても弾完全塑性体極限定理に用いられている概念であり⁴⁾、散逸エネルギー速度を表す正值関数である。極限定理の場合は、散逸関数は材料の崩壊が生じるときの散逸エネルギーを表し、関数形は降伏関数により定められる。本研究においては、応力 σ_{ij} が作用している材料内において散逸的なひずみ速度 d_{ij} が生じるときには、材料特有の散逸変形モードが存在するとし、この変形モードを基に散逸関数を定める。一般に、散逸変形モードをひずみ速度空間における方向ベクトルと絶対値を与えるための正值スカラー α に分解することとすれば、散逸関数は α の一次斉次式となる。

粒状体における散逸は粒子間滑りにより生じる。いま、2次元問題を扱うこととし、散逸変形モードを図-1に示す二重滑りモード⁵⁾と仮定する。また、上述のスカラー α を滑りのせん断ひずみ換算量とする。また、滑り面垂直方向には $\kappa\alpha$ の伸縮が生じるとする。この κ を伸縮係数と称し、硬化・軟化を考慮して別途定める。ひずみ速度空間における方向ベクトルに代えて、ここでは主応力軸と主ひずみ速度軸のなす角 φ 、最大主ひずみ速度軸と滑り面法線のなす角 θ を用いることとする。このとき、散逸仕事速度は次式で与えられる。

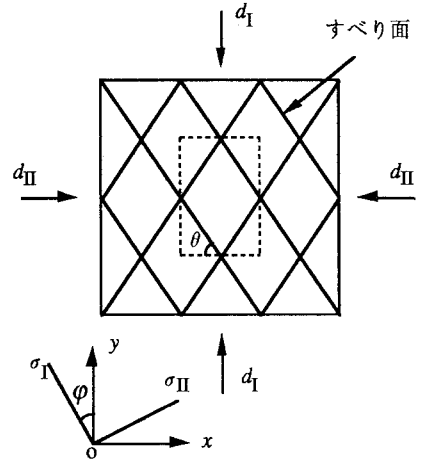


図-1 散逸変形モード

$$w_d = \sigma_{ij}d_{ij} = 2q \cos 2\varphi \sin 2\theta \alpha - 2\kappa(p + q \cos 2\varphi \cos 2\theta)\alpha \quad (1)$$

ここに、 p は平均応力、 q は軸差応力である。散逸関数は、滑り面に摩擦則を適用することにより次のように表される。

$$\psi = 2\eta(p + q \cos 2\varphi \cos 2\theta)\alpha \quad (2)$$

ここに η は摩擦係数である。拘束圧下で $\psi \geq 0$ が成立する。

2) 散逸条件と最大散逸仕事速度の原理 散逸条件は散逸仕事速度と散逸関数とを等値した式、またはこれを α で除した式で与えられるが、これが塑性論における降伏条件に相当する。散逸条件は力学的には散逸的変形に伴う外力のする仕事と内部で散逸されるエネルギーの平衡条件を表す。散逸変形モード式には一般にいくつかのパラメータを含ませることが可能である。これらのパラメータは散逸条件下で散逸仕事速度を最大にするという最大原理³⁾により決定され、 α を除いて散逸ひずみ速度が定まる。

上記の粒状体モデルについては、パラメータは θ および φ である。このモデルに最大散逸仕事速度の原理を適用すると、ある一定の滑り量 α に対し、次の目的関数を最大にするという条件に帰着する。

$$F(\theta, \varphi, A) = \sigma_{ij}d_{ij} + A(\sigma_{ij}d_{ij} - \psi) \rightarrow \max \quad A: \text{Lagrangeの未定乗数} \quad (3)$$

上式を θ 、 φ および A で偏微分した式を零とおけば、次式を得る。

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1}(\eta + \kappa), \quad \varphi = 0, \quad A = -\frac{\cos 2\theta + \kappa \sin 2\theta}{\cos 2\theta + (\eta + \kappa) \sin 2\theta} \quad (4)$$

式(4)₂は主応力軸と主ひずみ速度軸が一致するという共軸性を表す。以上より次の流れ則を得る。

$$d_{ij} = (j_i j_j - i_i j_j) \sin 2\theta \alpha - 2\kappa (i_i j_j \sin^2 \theta + j_i j_j \cos^2 \theta) \alpha \quad (5)$$

ここに i_i, j_j は、それぞれ、 x, y 方向の単位ベクトルである ($i_1 = j_2 = 1, i_2 = j_1 = 0$)。

3) 適応の条件 スカラー量 α を定めて構成則を確定するために、塑性論と同様に適応の条件を導入する。適応の条件は散逸的変形が生じ続けるために散逸条件が満たされ続けることを保証するものであり、散逸条件 (α で除した式) の全微分を零とおいた式により与えられる。この条件式に硬化・軟化則およ

び応力速度弾性ひずみ速度関係式を代入することにより、 α が決定され構成則が確定する。

粒状体モデルの適応の条件は、 κ を硬化・軟化パラメータとみなせば、次式で与えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \kappa} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \right) \dot{\kappa} = 0, \quad f(p, q, \theta(\kappa), \kappa) \equiv 2q \sin 2\theta - 2(\eta + \kappa)(p + q \cos 2\theta) = 0 \quad (6)$$

ここで、 κ に関して次式を仮定して、硬化・軟化則を導入する。

$$\kappa = G(\Gamma), \quad \Gamma \equiv \int \alpha dt \quad (7) \quad \dot{\kappa} = \dot{G}(\Gamma) \alpha = - \left(\frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial q} \dot{q} \right) / \left(\frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \kappa} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \right) \quad (8)$$

ここに、 $G(\Gamma)$ はダイレイタンス特性を考慮して決定される関数である。弾性部分については等方性を仮定すると、最終的に応力速度 σ_{ij} とひずみ速度 ϵ_{ij} の関係式として次式を得る。

$$\dot{\sigma}_{ij} = \lambda \left(\epsilon_{kk} + 2\kappa \alpha \right) \delta_{ij} + 2\mu \left\{ \epsilon_{ij} - (j_i j_j - i_i j_j) \sin 2\theta \alpha + 2\kappa (i_i j_j \sin^2 \theta + j_i j_j \cos^2 \theta) \alpha \right\} \quad (9)$$

ここに λ , μ はラメの定数である。すべり量 α は上式を式(8)に代入することにより求まる。

3. 解析例 式(9)を適用例として、平面ひずみ状態における平均応力一定の排水ひずみ制御試験をシミュレートした。解析例に用いた諸定数の値を表-1に示す。粒子の詰まり具合については、同表に示す3通りの場合を想定した。ここで粒子の詰まり具合は、限界状態初期のダイレイタンスの値を用いて表すこととした。また、ダイレイタンスが図-3のようになるように、 κ を最大せん断ひずみ γ の4次式に仮定した。

図-2にせん断ひずみ応力比関係を示す。密詰めおよび普通詰めの場合には応力比のピーク後から軟化状態となり、応力の増加なしにせん断ひずみが増加する限界状態に至っている。緩詰めの場合には軟化を示さず、限界状態に至るまで硬化状態となっている。また、詰め方によらず最終的な応力比は一定の値となった。以上のような傾向は実際の地盤材料の挙動をよくシミュレートしていると考えられる。

図-3にせん断ひずみダイレイタンス関係を示す。図-2の結果にも現れているように、上記の詰まり具合の表現方法が有効であると考えられる。また、密詰めおよび普通詰めの場合、せん断ひずみダイレイタンス曲線の変曲点P, Qが応力比のピーク値と一致している点も実際の地盤材料と合致していると思われる。

4. あとがき 以上、散逸関数による構成則理論を提示し、応用例により有効性を示した。今後3次元への応用を含め、散逸関数の設定を中心として研究を進める必要があると考えられる。

参考文献

- 1) Kishino, Y : Derivation of constitutive law for granular materials based on dissipative functions, Advances in Micromechanics of Granular Materials, Elsevier, pp.11-19, 1992.
- 2) Chandler, H.W : A plasticity theory without Drucker's postulate suitable for granular materials, J. Mech. Phys. Solids 33, pp.215-226, 1985.
- 3) Ziegler, H : An introduction to thermomechanics, North-Holland, 1977. (連続体の熱・力学, 森北, 1979)
- 4) Martin, J.B : Plasticity, The MIT Press, 1975.
- 5) Spencer, A.J.M : A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions, J. Mech.Phys.Solids 12, pp.337-351, 1964.

表-1 解析例に用いた諸定数

弾性係数E (kgf/cm ²)	300
ポアソン比 ν	0.35
摩擦係数 η	0.45
拘束圧 σ_0 (kgf/cm ²)	2.0
限界状態初期のせん断ひずみ γ_s (%)	15.0
ダイレイタンス値 (%)	
密詰め	4.00
普通詰め	1.75
緩詰め	-2.30
せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ (%)	0.01
軸差応力速度 \dot{q} (kgf/cm ²)	0.001

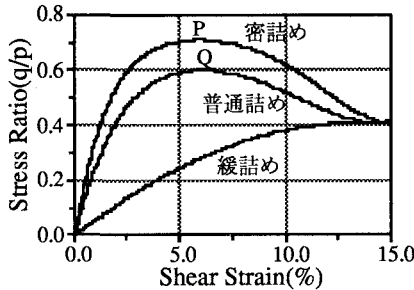


図-2 せん断ひずみ応力比関係

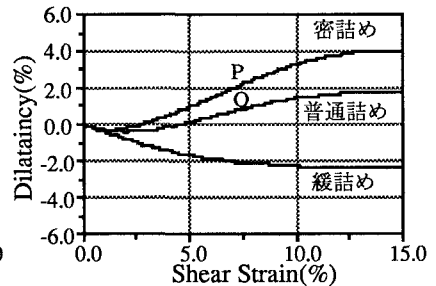


図-3 せん断ひずみダイレイタンス関係