II－319　# くりこみ群による乱流モデルの定式化に関する一考察

清水建設（株）　高梨和光

1. はじめに

くりこみ群（Renormalization Group）は理論に含まれるパラメータのスケール変換がある物理量にどのような制限を与えるかを定式化することである。このスケール変換は結合法則を満たし、数学の分野では半群というものに属すので、これからくりこみ群と呼ばれている。1977年 Forster [1] とその共同研究者によって移流拡散問題にくりこみ群の考え方が導入され、1986年 Yakhot と Orszag [2] は乱流モデルへの適用を行っている。しかしながら、Yakhot と Orszag [2] による定式化は式の展開に誤りがあるため、得られた乱流モデルの定数等が正しいものでなかった。ここでは、Yakhot と Orszag [2] の式の展開の誤りを訂正したくりこみ群による乱流モデルの構築を行なうものである。

2. 波数空間におけるナビエ・ストークスの方程式

乱流の統計的取り扱いにおいては、乱雑な速度場をさまざまな波長の正弦波の集まりとみなし、これを空間的なFourier級数の形に展開する。この展開は物理空間における微積分演算を波数空間での代数演算に変えるという便宜をもたらすほかに、運動方程式における移流項の働きを異なった波数のFourier成分の間の非線形相互作用という形で表すことができる。

式（1）はナビエ・ストークスの方程式に連続の方程式を代入したものを波数空間で記述したもので、ナビエ・ストークスの方程式に含まれる移流項に見られる非線形項は流速のたたみこみ積分として表されている。

$$v_\ell(\hat{k}) = G_0(\hat{k}) f_\ell(\hat{k}) - \frac{1}{2} i \lambda_0 G_0(\hat{k}) P_{\ell mn}(\mathbf{k}) \int v_m(\hat{q}) v_n(\hat{k}-\hat{q})\, d\hat{q}/(2\pi)^{d+1} \tag{1}$$

このとき、

$$G_0(\hat{k}) = (-i\omega + \nu_0 k^2)^{-1} \tag{2}$$

$$P_{ij}(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - k_i k_j / k^2 \tag{3}$$

$$P_{ijk}(\mathbf{k}) = k_k P_{ij}(\mathbf{k}) + k_j P_{ik}(\mathbf{k}) \tag{4}$$

とする。

ここで、外力としては正規分布を考え、

$$\langle f_i(\mathbf{k},\omega) f_j(\mathbf{k}',\omega') \rangle = (2\pi)^{d+1} 2 D_0 k^{-y} P_{ij}(\mathbf{k}) \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \delta(\omega+\omega') \tag{5}$$

とする。さらに、$\hat{k} = (\mathbf{k}, \omega)$，$\lambda_0 = 1$ そして $y > -2$ とする。

3. くりこみ群による基礎方程式

Yakhot とOrszag [2] に従い、式（1）にくりこみ群の考え方を導入して式の変形を行う。このとき、Yakhot と Orszag [2] による定式化は式の展開に誤りがあるため、得られた乱流の普遍定数等が正しいものでないのと同時に物理的な説明が満足になされていなかった。ここでは、Yakhot とOrszag [2] に従うものの、彼らの定式化の誤りを訂正した式の変形を行なう。

乱流の問題に対して、移流項から生じる非線形性による高い波数成分の効果は重要である。くりこみ群はこの効果を自己相似の現象として考えることで乱流の問題に対して適用される。これは以下の２つの操作、「高い波数成分を低い波数成分で記述する。」と「スケール変換（くりこみ群）によって波数の再定義を行なう。」によって行なわれる。

式 (1) にくりこみ群の操作を施すと次のようになる。

$$v_l'(\hat{k}') = G_r(\hat{k}') f_l(\hat{k}') - \frac{1}{2} i \lambda(r) G_r(\hat{k}') P_{lmn}(k) \int v_m'(\hat{q}') v_n'(\hat{k}' - \hat{q}') d\hat{q}' / (2\pi)^{d+1} \tag{6}$$

このとき、

$$G_r(\hat{k}') = [-i\omega + \nu(r)(\hat{k}')^2]^{-1} \tag{7}$$

$$f'(\hat{k}') = f^{<}(\hat{k}) e^{\alpha(r)} \xi^{-1}(r) \tag{8}$$

$$\lambda(r) = \lambda_0 \xi(r) e^{-(d+1)r} \tag{9}$$

$$\nu(r) = \nu_0 e^{\alpha(r) - 2r} \tag{10}$$

とする。
ここで、外力は次のように与えられる。このとき、

$$\langle f_i'(k,\omega) f_j(k',\omega') \rangle = (2\pi)^{d+1} 2D' k^{-y} P_{ij}(k) \delta(k+k') \delta(\omega+\omega') \tag{11}$$

とする。ゆらぎ D_0 はスケール変換に対して影響を受けないので、スケールパラメータ ξ は、

$$\xi = \exp\left[\frac{3}{2}\alpha(r) + \frac{d+y}{2} r\right] \tag{12}$$

となる。

また、定式化の過程でエネルギースペクトル $E(k)$ を次のように求めることができる。

$$E(k) = C_K \bar{\varepsilon}^{\frac{2}{3}} k^{-\frac{5}{3}} \tag{13}$$

$$(C_K = 1.605) \tag{14}$$

いままで、Yakhot とOrszag [2] は正しくない計算をしており、間違ったコルモゴロフ定数の値を求めていた。今回、求めた値はそれを修正したものである。このコルモゴロフ定数 C_K は実験によって求められている範囲 ($C_K = 1.3 \sim 2.3$) の中にある。

4. くりこみ群による乱流モデル（k-$\bar{\varepsilon}$モデル）

乱流モデル（k-$\bar{\varepsilon}$モデル）をくりこみ群によって求めるには、ナビエ・ストークスの方程式を変形して、波数領域での乱流の運動エネルギーの式と乱流のエネルギーの消散率の式を求め、３章で述べたくりこみ群による定式化を行なえばよい。これによって、高い波数成分によって生じる効果を陽な形で表現した式が得られ、これが従来より用いられてきた式になる。このとき、式 (13) と式 (14) も当然用いられる。これらのプロセスによって求められた乱流モデル（k-$\bar{\varepsilon}$モデル）は次のようになる。

乱流の運動エネルギーの式は、

$$\frac{\partial k}{\partial t} + (v \cdot \nabla) k = \frac{\nu_T}{2}\left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)^2 - \bar{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha \nu_T \frac{\partial k}{\partial x_i} \tag{15}$$

となり、乱流のエネルギーの消散率の式は、

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \bar{\varepsilon} = -1.049 \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} - 1.639 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_i} \alpha \nu_T \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_i} \tag{16}$$

となる。ここで、

$$\nu_T = 0.0876 \frac{k^2}{\bar{\varepsilon}} \tag{17}$$

$$\alpha = 1/P_t = 1.3929 \tag{18}$$

$$P_t = 0.7179 \tag{19}$$

とする。

5. おわりに

Yakhot とOrszag [2] の理論の誤りを訂正して、くりこみ群による乱流モデル（k-$\bar{\varepsilon}$モデル）の構築を行なった。これによって、乱流モデル（k-$\bar{\varepsilon}$モデル）の定数を理論的に決定することができた。

参考文献

(1) Forster,D.,Nelson,D. and Stephen,M., Phys.Rev.,A16(1977),732

(2) Yakhot,V. and Orszag,S.A., J. Sci. Comput.,1-1, (1986),3-51