II-353　有限要素法による津波数値計算精度の検討

東北大学大学院　学生員　○高橋　武之
東北大学工学部　正　員　今村　文彦
東北大学工学部　正　員　首藤　伸夫

1　はじめに

現在、津波の数値計算は主に差分法で行われているが、リアス式海岸等の複雑な地形や変化に富んだ海岸線を表すには、要素の形や大きさを任意に選ぶことのできる有限要素法の方が有効である場合がある。これまでに、いくつかの有限要素法による計算方法が提案されて用いられているが、数値減衰が大きいなど計算精度の点で問題が残っている。そこで本研究では、簡単な一次元長方形水路を用い、有限要素法による数値計算を行った場合、離散化の際に付加される数値粘性項及び数値分散項を明確にするとともに、精度に与える影響を検討する。

2　基礎方程式と計算方法

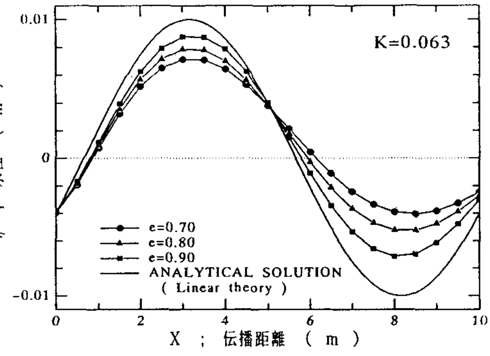
基礎方程式には浅水長波理論に基づき、連続の方程式と運動方程式を用いる。これらの式に重みをかけて有限要素方程式を作成し、ガラーキン法に従って空間方向への離散化を行う。なお、補間関数には１次多項式を用いる。また、時間方向へはKawaharaら(1982)にならい、安定性がよい修正２段階ラックス-ヴェンドロフ法を用いて離散化を行う。この際、高速計算を可能にするために、質量マトリクスMの非対角項を対角項に集めた形の集中化質量マトリクス$\bar{M}$を用いて、数値的減衰を取り除くためにこの２つのマトリクスを混合させた混合化質量マトリクス$\tilde{M}$を新しい質量マトリクスとする。混合化質量マトリクスは(1)式で表される。

$$\tilde{M} = e\bar{M} + (1-e)M \quad (1)$$

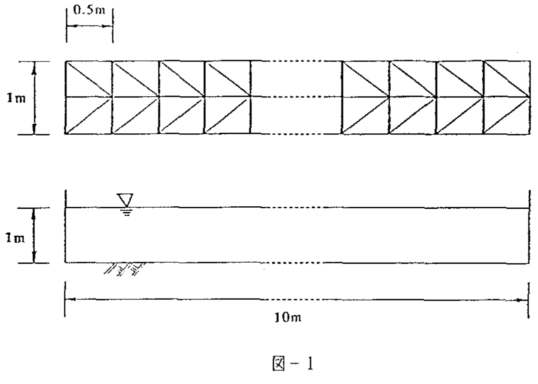
ここでｅは混合比である。

3　計算結果

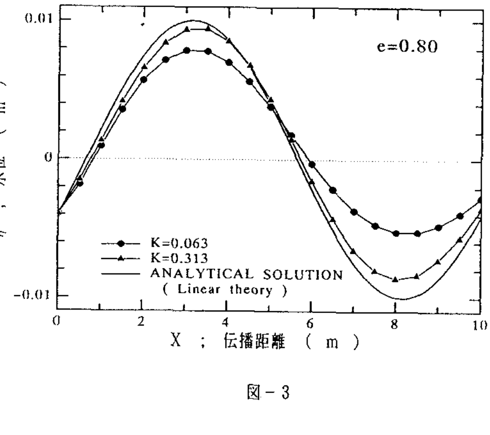
図１は、節点数63、要素数80の有限要素によってモデル化された幅１ｍ、長さ10ｍ、水深１ｍの長方形水路の要素分割図である。要素幅は$\Delta x = 0.5$ｍである。この水路に、片側（入口側）から周期Ｔ＝3.19ｓ、振幅0.1ｍの正弦波を伝播させ、時間ｔ＝２ｓにおける水路中心線上での波形を取り出して理論解と比較する。ただし、長方形水路の出口では進行波の条件を与え、波が透過するようにしてある。図２は時間間隔$\Delta t = 0.01$ｓとして計算を行ったものである。このときＫ＝0.063である。ここで、Ｋはクーラント数であり、$K = c_0\Delta t/\Delta x$で与えられる。丸印は混合比ｅ＝0.7、三角印は混合比ｅ＝0.8、四角印は混合比ｅ＝0.9、実線は線形理論解である。この図から混合比ｅの値を大きくすると数値的な減衰は減少する傾向にあることが分かるが、ｅの値が1.0を越えると解は収束せず発散する。次にＫの値が計算結果にどのように影



図－２



図－１



図－３

響があるのか調べてみる。Ｋが0.063のときと0.313のときの波形を比較してみたものが図３である。この図からクーラント数Ｋの値を大きくすると数値的な減衰が取り除かれる傾向にあることが分かる。

4　Taylor級数による打ち切り誤差の解析

議論を簡単化するために、線形長波理論、一次元伝播、線形要素の仮定の基に有限要素方程式を離散化すると(2)式のようになる。

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} + \frac{c_0^2}{3}(1-e)\frac{\Delta x}{K}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} - \frac{c_0^2}{3}\Delta x^2\{(2-e)-K^2\}\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} = 0 \quad (2)$$

この式の第３、４項はそれぞれ数値誤差（粘性項、分散項）であり、これらの項の存在が数値的な波高減衰をもたらしていると考えられる。さらにこの式をフーリエ変換を用いて解き、増幅係数（粘性）と伝播速度比（分散性）を求めてみる。これらの結果を表したものが図４、図５である。ここで破線はｅ＝0.7、実線はｅ＝0.9のときのものである。増幅係数、伝播速度ともにｅとＫの両方に依存している。そして、ｅとＫの値が大きい程、増幅係数、伝播速度比はともに１に近づくことが分かる。これより、数値的な減衰をおさえるにはｅ、Ｋの値を大きく（１に近づける）すればよいことが確かめられた。これは先に述べた計算結果と一致する。また、図６は孤立波を用いて計算させた場合の時間ｔ＝１ｓにおける計算波形と(2)式による解とを比較したものであり、誤差解析が正しいことを示している。

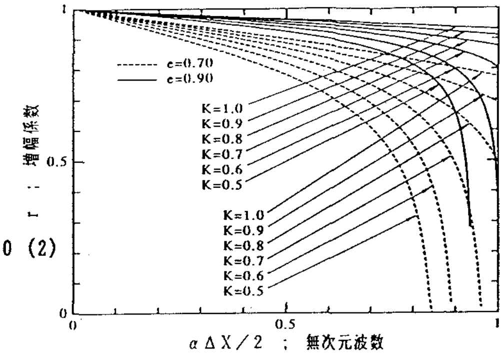
次に、差分法において２段階ラックス-ヴェンドロフ法を用いて離散化した場合には(2)式は(3)式のようになる。（今村・後藤，1987）

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} - c_0^2\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2} - c_0^2\Delta x\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3} - \frac{c_0^2}{3}\Delta x^2(1-K^2)\frac{\partial^4\eta}{\partial x^4} \quad (3)$$

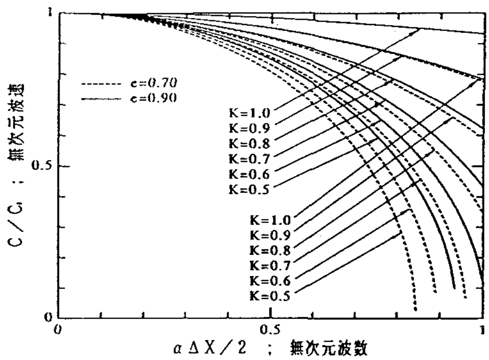
(2)、(3)式を比較すれば、粘性効果に関する限りではｅとＫの組合せによってはむしろ有限要素法の方が優れていることが分かる。

5　結論

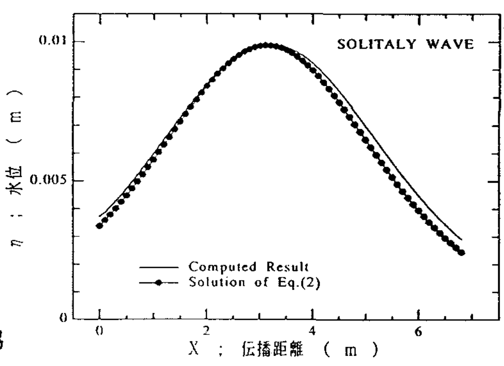
質量マトリクスと集中化質量マトリクスの混合比ｅ、クーラント数Ｋの値を１に近づけることにより数値的な減衰が減少することが確認された。また、有限要素法で津波の数値解析を行う場合、粘性項による減衰の他に分散項による減衰もかなり大きいことが確認された。



図－４



図－５



図－６

＜謝辞＞
清水建設の高梨和光さんにはFEM解析方法について御協力いただきました。

＜参考文献＞
Kawahara,M et al.:Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow,Int.Num.Meth.Fluid.Vol2,pp.89-112,1982.
今村文彦・後藤智明:差分法による津波数値計算の打ち切り誤差,土木学会論文集,第375号／Ⅱ－6,pp.241-250,1987.