

II-349

摂動法に基づいた有限要素法による港内静穏度解析

中央大学 学生員 櫻庭 雅明

中央大学 正会員 檜山 和男

1. はじめに

従来の水面波動解析では、入力データは不確定変動のないものと仮定され解析が行われてきた。しかし、入力データには多くの不確定性が含まれており、その不確定性に起因する変動量を知ることが工学上重要である。著者らは既に反射率の変動を考慮した解析を確率有限要素法を用いて行っている。^[1]

本論文では、波の入射角に変動成分を与え、摂動法に基づいた有限要素法を水面波動問題に適用した結果を報告する。なお、解析例としては解析解の存在する長方形港湾の湾水振動解析及び任意形状港湾の港内静穏度解析を行った。

2. 基礎方程式と境界条件

水面波動問題の解析における基礎方程式としては、水深変化の影響を考慮した緩勾配方程式を用いる。

$$(CC_g\eta_{,i})_{,i} + k^2 CC_g\eta = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

ここに、 η は合成波の振幅関数、 C は波速、 C_g は群速度、 k は波数、 Ω は解析領域を示す。境界は図-1に示すように、構造壁面境界 Γ_s と無限遠方の仮想境界 Γ_∞ に分けられ、境界条件は次式で与えられる。

$$\eta_{,n} = ik \sin \alpha \frac{1 - K_r}{1 + K_r} \eta \quad \text{on } \Gamma_s \quad (2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} (\eta_{sc,r} - ik\eta_{sc}) = 0 \quad \text{on } \Gamma_\infty \quad (3)$$

ここに、 α は波向き角、 K_r は壁面反射率、 i は虚数単位を示す。

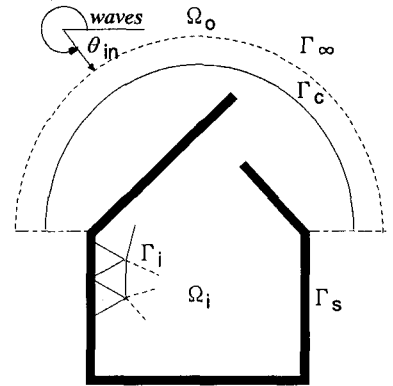


図-1 領域の定義

3. 有限要素方程式

基礎方程式の定式化には、内部領域 Ω_i にはKashiyama, Kawaharaが提案した境界型有限要素法^[2]、水深一定を仮定した外部領域 Ω_o には固有関数展開表示された解析解^[3]を用いた結合解法を適用する。また、内挿多項式としては内部領域 Ω_i にヘルムホルツ方程式の解を満足する三角形要素、外部領域 Ω_o に開境界 Γ_o 上に幾らかの節点を持つ特殊要素を用いて離散化を行うと、次式のような有限要素方程式が得られる。

$$[K]\{\eta\} = \{F\} \quad (4)$$

ここに、 $[K]$ は対称な剛性マトリックス、 $\{F\}$ は入射波による荷重ベクトルである。

4. 摂動法に基づく有限要素解析^[4]

本解析では、波の入射角 θ_{in} が不確定変動するものと仮定し、(4)式で求められた剛性マトリックス、振幅関数、荷重ベクトルは2次の項まで考慮したテイラー級数展開された近似式で示される。

$$[K] = [\bar{K}] + \sum_{k=1}^n [K_k^I] \mu_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n [K_{kl}^{II}] \mu_k \mu_l \quad (5)$$

$$\{\eta\} = \{\bar{\eta}\} + \sum_{k=1}^n \{\eta_k^I\} \mu_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \{\eta_{kl}^{II}\} \mu_k \mu_l \quad (6)$$

$$\{F\} = \{\bar{F}\} + \sum_{k=1}^n \{F_k^I\} \mu_k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \{F_{kl}^{II}\} \mu_k \mu_l \quad (7)$$

ここに、各式の第2項及び第3項は μ に関する1次変動率及び2次変動率、 n は領域内に含まれる確率変数の個数、 μ_k, μ_l は入射角を用いる節点での期待値0の微小確率変数を表す。(5),(6),(7)式を(4)式に代入し、各項で等置することにより、確定解、変動率は次式で求められる。

$$\{\bar{\eta}\} = [\bar{K}]^{-1} \{\bar{F}\} \quad (8)$$

$$\{\eta_k^I\} = [\bar{K}]^{-1} (\{F_k^I\} - [K_k^I] \{\bar{\eta}\}) \quad (9)$$

$$\{\eta_{kl}^{II}\} = [\bar{K}]^{-1} (\{F_{kl}^{II}\} - [K_{kl}^{II}] \{\bar{\eta}\} - [K_k^I] \{\eta_k^I\} - [K_l^I] \{\eta_l^I\}) \quad (10)$$

ここに $\{\bar{\eta}\}$ は振幅関数の確定解、 $\{\eta_k^I\}$ は1次変動率、 $\{\eta_{kl}^{II}\}$ は2次変動率を表す。

5. 数値計算例

本手法の有効性を示すために、図-2に示す一定水深の長方形港湾の湾水振動解析に本手法の適用を行った。計算条件として、壁面での反射率は1.0（完全反射）とし、波は直角に入射するものとした。 $kl=1.3$ のときの1次振動解及び2次振動解と、 $\theta_{in}=225^\circ \sim 315^\circ$ としたときのそれぞれの値を代入し、有限要素解析を行ったときの確定解の比較を図-3に示す。図より $\theta_{in}=230^\circ$ で1次振動解との誤差が0.17%、2次振動解で0.04%程度となり、両者とも誤差は非常に小さなものとなり本手法の有効性が認められる。特に2次振動解においては、確定解に非常に近い値となっている。

次に、任意形状港湾の港内静穏度解析^[5]を行った。水深形状は湾奥に向かって一様上り勾配(1/15)であり、入射波の波向きは湾口に対して直角に入射するものとする(図-4参照)。また、壁面での反射率は0.9と仮定した。 $T=0.73\text{sec}$ のときのA点での振動解と確定解の比較を図-5に示す。ここでは入射角の変動が大きい場合、確定解との差異が見られるが、2次振動解においては比較的確定解に近い値が得られた。

6. おわりに

本論文において、振動法に基づく有限要素法を波の入射角の変動を考慮した水面波動問題に適用することの検討を行った。その結果、1回の計算のみで入射角に変動を持った解が得られ、本手法の有効性が認められた。今後の課題は振動解の精度の検討を行うとともに、変動成分を考慮した水面波動解析を行い、本手法の不規則波解析への適応性について検討を行う予定である。

参考文献

- [1] 櫻庭雅明, 檜山和男:入力データの不確定性を考慮した水面波動問題の確率有限要素解析, 水工学論文集第37巻, pp775-780, 1993
- [2] Kashiya .K and Kawahara .M
A boundary type finite element method for water surface wave problems, Int. J. Number. Methods Fluids, Vol.8 pp.65-69, 1988
- [3] Chen, H.S., and Mei, C.C., Oscillations and wave forces in an offshore harbor, Ralph M. Persons Lab., MIT, Report No.190, 1974
- [4] 中桐滋, 久田俊明:確率有限要素法入門, 培風館出版, pp.28-29, 1990
- [5] Sato .N, Isobe .M and Izumiya .T
A numerical model for calculating wave height distribution in a harbor of arbitrary shape, Coastal Eng. in Japan, Vol.33, No.2, pp.119-131, 1990

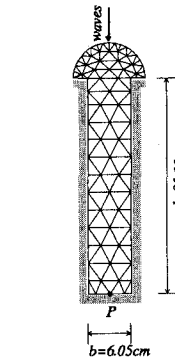


図-2 有限要素分割図
(節点数86, 要素数118)

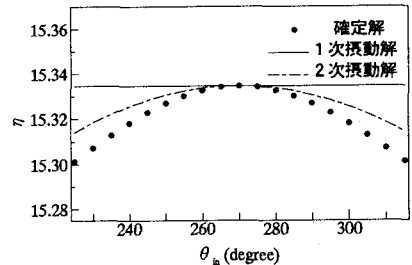


図-3 P点での確定解と振動解の比較
($kl=1.3$)

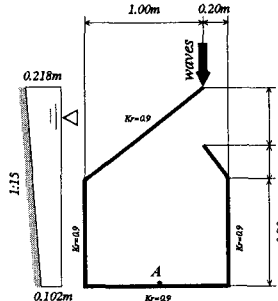


図-4 解析モデル

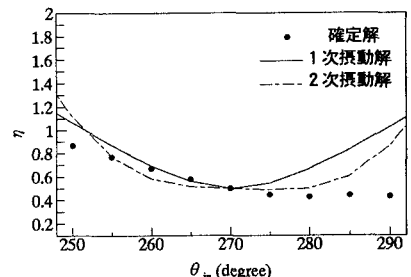


図-5 A点での確定解と振動解の比較
($T=0.73\text{sec}$)