II－347　境界層流れの非線形性に伴う波の分裂について

北海道大学工学部　正　員　浜中建一郎
北海道大学大学院　学生員　渡部　靖憲

１.まえがき

波が、水深の急変する領域を通過する時や没水型構造物を通過する時、分裂し高次の自由波を発生させていることは良く知られている。この現象は、波が海底地形や構造物により強い変形を受けて発生する多くの波数成分の内、波の非線形性によって発生する高次の周波数成分との間に分散関係を満たす成分が選ばれて、以後自由波として進行するものと理解できる。これまでのこの分裂現象に関する研究は、主として自由水面での境界条件の非線形性に注目した解析がなされてきた。しかしながら、波動場における非線形性は、自由水面での境界条件だけではなく、底面や構造物表面上の境界層流れによっても発生する。実際、この非線形性による２次の定常流成分として定常循環流が古くから研究されているが、その時同時に発生する２倍周波数成分は、これまであまり注目されていなかったようである。しかしながら、この２倍周波数成分流れの境界層法線方向成分は、境界層外側でも消滅せずに残り、上に述べた分裂波の発生機構を考えるとき何らかの寄与をする可能性が考えられる。このことから、本研究では、はじめに境界層方程式を２次のオーダまで解き、法線方向の成分を求め、次にそれを固定壁上の境界条件に適用したグリーンの公式による没水円柱上を通過する波の分裂について述べることを目的とする。

２.境界層流れ

構造物表面に接する方向にx軸、それに直交する方向にy軸をとり、通常の境界層方程式を考えると

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ここで、u，vは境界層内流れのx，y成分、Uは境界層外流れのx成分、νは動粘性係数である。このu, vを摂動展開し、$u=u_1+u_2+\cdots\cdots$, $v=v_1+v_2+\cdots\cdots$とし、(1)式を1次のオーダで解くと

$$u_1=\frac{D}{2}(1-e^{-qy})e^{i\omega t}+\mathrm{C.C.}\quad ただし\ U=\frac{D}{2}e^{i\omega t}+\mathrm{C.C.}\ ,\ q=(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}\quad\cdots\cdots(2)$$

となり、同時に連続の式から

$$v_1=\left\{\frac{E}{2}+\frac{D_x}{2q}\ (1-e^{-qy})\right\}e^{i\omega t}+\mathrm{C.C.}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ただし　Eは、外側流速のy方向成分で、$V=(E/2)\,e^{i\omega t}+\mathrm{C.C.}$ であり、境界層外側も含めた表現をするときは必要となる。

次に２次のオーダで(1)式を解くと、２倍周波数成分に関して

$$u_2=\frac{i}{2\omega}DD_x(e^{-q_2 y}-\frac{1}{2}e^{-qy}-\frac{1}{2}e^{-2qy})e^{2i\omega t}+\mathrm{C.C.}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$v_2=\frac{i}{2\omega}(DD_x)_x\left\{-\frac{1}{q_2}(1-e^{-q_2 y})+\frac{1}{2q}(1-e^{-qy})+\frac{1}{4q}(1-e^{-2qy})\right\}e^{2i\omega t}+\mathrm{C.C.}\cdots(5)$$

ただし　$q_2=2^{1/2}q$　である。

(4), (5)式から境界層外側($y\to\infty$)では、u_2は消滅するがv_2は残り、

$$v_2=\frac{C}{2}e^{2i\omega t}+\mathrm{C.C.}\quad ,\ ただし\quad C=\frac{i}{\omega}(DD_x)_x\left(-\frac{1}{q_2}+\frac{3}{4q}\right)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

となる。一方、境界層外側での流れをポテンシャル流れとし、その速度ポテンシャルをΦとすると、

$$\Phi=\frac{\phi_1}{2}e^{i\omega t}+\frac{\phi_2}{2}e^{2i\omega t}+\mathrm{C.C.}\quad,\frac{\partial\phi_2}{\partial y}=C\quad,\ D=\phi_{1x}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

となる。

3．グリーンの公式

没水型円柱を通過する波を断面2次元で考えると、速度ポテンシャルϕのラプラス方程式に対する主要解は、$G(r)=\log r$であり、グリーンの公式は

$$\phi(\xi',\eta')=\frac{1}{\pi}\int_S\left\{\phi(\xi,\eta)\frac{\partial G}{\partial n}-G\frac{\partial\phi(\xi,\eta)}{\partial n}\right\}ds\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

と表される。ただし、(ξ',η'), (ξ,η)は境界S上の点で、rはその２点間の距離であり、また積分は(ξ,η)に関するものである。nは、境界S上で流体内から外に向かう法線を表す。

(8)式を用いて波の分裂を解くには、構造物前後の仮想境界上に線形波の条件を与えて(8)式を解き、それをϕ_1とする。積分は通常行われている様に離散化して行う。次に(7)式の第3式から円柱上のϕ_1の接線方向微係数を求めCを得る。それにより(7)式の第2式からϕ_2に対する構造物表面上の境界条件が与えられ、仮想境界上に倍周波数の自由波の条件を与えながら(8)式をϕ_2について解くことにより分裂波が得られる。

4．ϕ_1に対する境界条件

底面及び円柱表面で　　$\partial\phi/\partial n=0$

自由水面で、線形境界条件より　　$\partial\phi/\partial n=\partial\phi/\partial y=\dfrac{\omega^2}{g}\phi$

入射仮想境界で　　$\phi=(e^{-ik(x+l)}+a_r\,e^{ik(x+l)})\,A_1(y)$

通過仮想境界で　　$\phi=a_t\,e^{-ik(x-l)}A_1(y)$　　$\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$

ただし　$A_1(y)=\dfrac{\cosh k(y+h)}{\cosh k\,y}$　，kは線形波の波数

5．ϕ_2に対する境界条件

底面上では、ϕ_1に対するのと同じ（ただし底面の境界層も考慮するなら円柱表面に対する扱いと同じとすればよい）。

円柱表面では、(7)式の第2項、第3項から求まる$\partial\phi/\partial n$を(8)式に代入すると既知量となり、方程式の定数項となる。

自由水面では、通常の自由水面の境界条件を２次のオーダで摂動展開した結果を(8)に代入することにより、非線形性に伴う定数項が現れる。

入射、通過仮想境界では、倍周波数の自由波の波数を用いて(10)式と同様な反射波と通過波の水深方向の分布形を与えると同時に強制波としての２次の波動解をあたえる。

6．結論

４節、５節で述べた境界条件を用いて、さらに(8)式を離散化することにより、連立１次方程式が得られϕ_1，ϕ_2が求まり、１次のオーダの解析から線形波の反射波、通過波が、２次のオーダの解析から分裂波の反射波、通過波が求まる。

以上、境界層流れの非線形を考慮した波の分裂の解析について述べたが、今後定量的な検討を行い、境界層流れが分裂現象にどの程度影響を及ぼすか調べて行きたい。