

II-329

浮力駆動流の支配方程式と解の特性

正 大沼博志 ((財)電中研) 正 服部 康男 ((財)電中研) 辻 俊博 (名工大) 長野 靖尚 (名工大)

1. 緒言 浮力駆動流の解析には、これまでBoussinesq近似⁽¹⁾が多く用いられてきた。この近似式による解析は容易であるが、温度差が大きい流れ系に対しての利用は疑問視されている。また、厳密な支配方程式の解析は、一般に非常に複雑となり、乱流解析等を行なうのは事実上不可能と思われる。そこで本研究では、浮力駆動流の支配方程式に考察を加え、新しい支配方程式を提案した。そして、その方程式の有用性について、層流の解析で確認した。

2. 主な記号 c_p : 定圧比熱; Gr: グラスホフ数; $\mathbf{g}$: 重力ベクトル; L: 正方形空間の1辺の長さ; p: 圧力; Pr: プラントル数; $\mathbf{q}$: 熱流束ベクトル; t: 時間; T: 温度; T_0 : 基準温度; ΔT_w : 壁温と基準温度の差あるいは壁面間の温度差; u, v, x : およびy方向の速度; x, y : 鉛直および水平方向座標; α : 温度伝導率; β : 体膨張率; ν : 動粘性係数; ρ : 密度; $\boldsymbol{\tau}$: 応力テンソル; D/Dt : 実質微分

添字 w, ∞ : 壁面および周囲における値

3. 浮力駆動流の支配方程式 浮力駆動流について、以下の連続の式、運動方程式および熱エネルギー式、 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$ (1), $\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p - [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] + \rho \mathbf{g}$ (2), $\rho c_p \frac{DT}{Dt} = -(\nabla \cdot \mathbf{q}) + T\beta \left[\frac{Dp}{Dt} - \rho(\mathbf{v} \cdot \mathbf{g}) \right] - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$ (3) に流体の状態式を加えたものが厳密な支配方程式である。一般に、熱エネルギー式中の圧力項は、移流項および熱伝導項に比べて非常に小さいオーダーで省略できる(散逸項も省略できる)。そのため、熱エネルギー式に関する圧力が、運動方程式中の圧力と厳密に区別されて扱われている例は非常に希である⁽²⁾。熱エネルギー式中の圧力項は、確かにオーダーが小さく無視できる場合が多いが、浮力駆動流の発生を考える上では非常に重要な項である。すなわち、この項は、式(2)から導かれる運動エネルギーの輸送方程式における圧力項およびポテンシャル・エネルギーと逆符号で直接結びつき、熱エネルギーの運動エネルギーへの転換の役目を担っている。一方、Boussinesq近似⁽¹⁾を施した支配方程式は次のように表される。

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (4), \quad D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p^*/\rho + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \mathbf{g}\beta(T - T_0) \quad (5), \quad DT/Dt = \alpha \Delta T \quad (6)$$

この支配方程式は連続の式が簡単になり、理論的な扱いも容易である。なお、式(5)で定義される圧力 p^* は、流動に伴う静圧の変化分を表す。ところが、熱エネルギー式に関して式(4)の成立を考えると、気体の比熱は定圧、定積のどちらでもよいことになる⁽³⁾。また、筆者らは空気の流れ対流境界層に関する実験的知見から、熱エネルギーの乱流運動エネルギーへの圧力変動を介する直接転換が伝熱面近傍で発生することを指摘した⁽⁴⁾。熱エネルギー式の解析からそのことに結びつく圧力項の挙動を直接算出することはオーダー的に困難である。そのため、このエネルギー転換過程を解析に反映するには、運動エネルギーの輸送方程式の中で熱膨張仕事の発生を考慮しなければならない。Boussinesq近似に基づき連続の式(4)を用いたのでは、重力方向以外の熱膨張仕事の効果を与えることができず、したがって浮力駆動流の乱流現象を正しく予測することができない。浮力駆動流の解析には、基本的に厳密な支配方程式を用いればよいが、実際の計算となるとその扱いは非常に煩雑である。特に、乱流現象解析への適用は極めて困難である⁽²⁾。そこで、実用上の解析に有効な近似支配方程式を以下に提案する。

一般に低マッハ数の浮力駆動流では、圧力による密度変化は温度によるものに比べて小さく無視できる(熱膨張性のみの仮定)。そして、温度差がそれほど小さくなく、Boussinesq近似と同様に密度と温度の間に線形関係が成立するものとする、Landau-Lifshitz⁽⁵⁾による浮力流の運動方程式の導出法に従い、密度変化の一次のオーダーで連続の式を、

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \beta DT/Dt = \alpha \beta \Delta T \quad (7)$$

と近似できる。

式(7)の最右辺は、熱エネルギー式と関係づけたものである。また、運動方程式および熱エネルギー式も密度

変化の一次のオーダーで近似すると, 結果的にBoussinesq近似による式(5), (6)と同じになる. なお, Landau-Lifshitz⁽⁵⁾は, 連続の式の詳しい検討は行っていない.

4.浮力駆動流の解析例 以下に気体(空気 $Pr=0.71$)を対象に層流の解析を行い, 式(1)-(3)と状態式(ρT 一定, 熱エネルギー式の圧力項, 運動方程式の圧縮項など項は省略)から得られる厳密解, Boussinesq近似による解および提案した支配方程式(5)-(7)による解を比較する. ただし, 基本的な解の特性を調べる目的で, 密度に関する以外の物性値はすべて一定とする. まず初めに平板境界層流の場合について考える. いずれの支配方程式についても境界層近似が適用できる. この問題の厳密解(相似解)は, 藤井⁽⁴⁾によって求められている. 近似支配方程式(5)-(7)と境界条件は, 次のようになる.

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = \alpha \beta^2 T/\partial y^2 \quad \dots\dots\dots (8), \quad u\partial u/\partial x + v\partial u/\partial y = \nu \partial^2 u/\partial y^2 + g\beta(T-T_\infty) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$u\partial T/\partial x + v\partial T/\partial y = \alpha \partial^2 T/\partial y^2 \quad \dots\dots\dots (10), \quad y=0: u=v=0, T=T_w, \quad y \rightarrow \infty: u=0, T=T_\infty \quad \dots\dots (11)$$

ここでは温度の基準を周囲温度とする. 式(8)-(11)は, 次の相似変数を導入して,

$$\eta = C_1 x^{-1/4} y, \psi = C_2 x^{3/4} f(\eta), u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} + \alpha \beta \frac{\partial T}{\partial y}, T - T_\infty = \Delta T_w h(\eta), C_1 = \left(\frac{g\beta\Delta T_w}{4\nu^2}\right)^{1/4}, C_2 = 4\nu C_1 \quad \dots\dots (12)$$

以下の常微分方程式と境界条件に変換できる(壁温一定の条件に限りこの変換が可能である).

$$f'''(\eta) - 2\{f'(\eta)\}^2 + 3f(\eta)f''(\eta) - (\beta\Delta T_w/Pr)f''(\eta)h'(\eta) + h(\eta) = 0 \quad (13), \quad h''(\eta) + 3Prf(\eta)h'(\eta) - \beta\Delta T_w\{h'(\eta)\}^2 = 0 \quad (14)$$

$$\eta=0: f(\eta) = \beta\Delta T_w h'(\eta)/(3Pr), \quad f'(\eta) = 0, \quad h(\eta) = 1, \quad \eta \rightarrow \infty: f'(\eta) = 0, \quad h(\eta) = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

Boussinesq 近似による支配方程式は, 式(13)-(15)の

パラメータ $\beta\Delta T_w$ を零とおいたものに相当する. それぞれの支配方程式から得られる速度分布および温度分布を, 周囲温度における密度と体膨張率を用いた座標に統一して図1に比較した. 近似支配方程式による解は, それに含まれる体膨張率および密度の値の評価について任意性があるが, $Tr=T_\infty+0.22\Delta T_w$ の温度における値を用いると, 図に示すように速度分布, 温度近似式を用いて水平線熱源上ブルーム, 正方形キャビティの解析も行なった結果, Boussinesq近似では表わすことのできない現象も捉えることができた.

5.結言 浮力駆動流についての支配方程式を検討し, 実用的な近似支配方程式を提案した. 層流に限られた解析ではあるが, この近似支配方程式による解は, 従来のBoussinesq近似では表現できない浮力駆動流の本質的な特性をよく表現し, その有用性が確認できた.

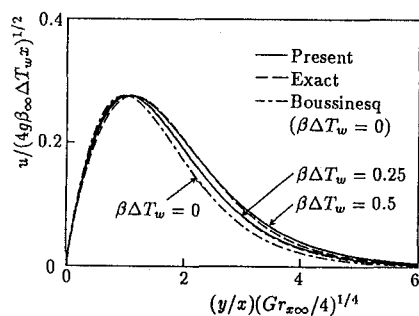
(1) Boussinesq, J., *Theorie Analytique de la Chaleur* vol.2 (1903), 154, Paris: Gauthier-Villars.

(2) Paolucci, S., *J. Fluid Mech.*, vol.215 (1990), 229.

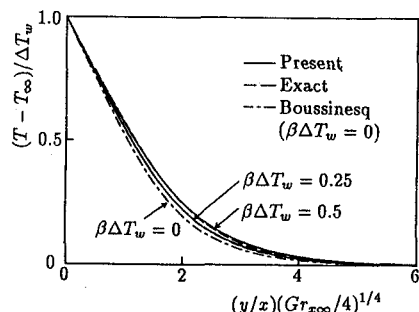
(3) 藤井, 伝熱工学の進展, vol. 3, (1974), 15, 養賢堂.

(4) 辻・ほか3名, 機論, vol.57-543, B(1991), 3879.

(5) Landau, L.D. and Lifshitz, E.M., *Fluid Mechanics* 2nd ed., (1987), 217, Pergamon Press.



(a) Velocity profiles



(b) Temperature profiles

Fig. 1 Laminar boundary layer