II－327

平面２次元 k-ε モデルの定式化

九州大学大学院　学生員○矢野真一郎　九州大学工学部　正　員　小松　利光
九州大学工学部　正　員　朝位　孝二　九州大学工学部　正　員　中村　由行
運輸省　正　員　松永　康司

1. はじめに

内湾や沿岸部などの様に水深方向に比較して非常に大きな水平方向スケールを持つ流れ場や拡散場において、流況や拡散のシミュレーションを行う際に平面２次元モデルが用いられることが多い。その際、渦動粘性係数・渦動拡散係数を自動的に評価する事が出来る k-ε 乱流モデルを用いた解析がよく行われている[1]。しかしながら、モデル定数に３次元モデルでの値をそのまま用いている場合が多く、厳密な意味での k,ε の鉛直平均値を評価しているとは言えない。そこで本研究では、流速 U、乱れエネルギー k、乱れエネルギーの散逸率 ε、渦動粘性係数 ν_t の鉛直分布を仮定し、平面２次元 k-ε 乱流モデルのための k,ε 方程式の定式化を行った。

2. 平面２次元 k-ε 乱流モデルの誘導

３次元 k-ε 乱流モデルにおける k,ε 方程式及び、渦動粘性係数 ν_t は次式の様に表される。

$$\frac{\partial k}{\partial t}+U_i\frac{\partial k}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k}\frac{\partial k}{\partial x_i}\right)+P-\varepsilon \quad (1), \qquad \nu_t=C_\mu\frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+U_i\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}\right)+C_{1\varepsilon}\frac{\varepsilon}{k}P-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2), \qquad P=\nu_t\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

ここで、$i,j=1,2,3,\ \sigma_k=1.0,\ \sigma_\varepsilon=1.3,\ C_{1\varepsilon}=1.44,\ C_{2\varepsilon}=1.92,\ C_\mu=0.09$ である。

次に、粗面開水路流における水平方向流速 U,k,ν_t の鉛直分布は次式の様に与えられる。

$$\frac{U}{U_*}=\frac{1}{\kappa}ln\left(\frac{\xi}{\xi_s}\right)+A_r \quad (4), \qquad \frac{k}{U_*^2}=D\,exp\left(-\frac{\xi}{l_*}\right) (5), \qquad \nu_t=\kappa\,U_*\,h\,\xi(1-\xi) \quad (6)$$

ここで、$\xi=z(=x_3)/h,\ l_*=l/h,\ \xi_s=k_s/h,\ A_r=8.5,\ h$：水深、$l$：乱れの減衰スケールを表す定数、$k_s$ は相当粗度、κ：カルマン定数（$=0.4$）、U_*：底面における摩擦速度である。式(3),(5),(6)及び、$D^2=1/C_\mu$ より ε の鉛直分布は、

$$\varepsilon=\frac{U_*^3\,exp(-2\,\xi/l_*)}{\kappa\,h\,\xi(1-\xi)} \quad (7)$$

よって、式(4),(5),(6),(7)より U,k,ε,ν_t の鉛直平均値 $\overline{U},\overline{k},\overline{\varepsilon},\overline{\nu_t}$ を求めると、以下の様になる。

$$\frac{\overline{U}}{U_*}=\frac{1}{\kappa}ln(1/\xi_s)-\frac{1}{\kappa}+A_r\equiv\varphi \quad (8), \qquad \overline{k}=D\,l_*\,U_*^2\{1-exp(-1/l_*)\} \quad (9)$$

$$\overline{\varepsilon}=\frac{U_*^3}{\kappa h}\int_0^1\frac{exp(-2\,\xi/l_*)}{\xi(1-\xi)}d\xi \quad (10), \qquad \overline{\nu_t}=\frac{\kappa\,U_*\,h}{6} \quad (11)$$

式(1),(2),(3)を鉛直方向に積分すると平面２次元 k-ε 乱流モデルにおける k,ε 方程式、及び $\overline{\nu_t}$, $\overline{k},\overline{\varepsilon}$ の関係式が得られる。その際、式(1),(2),(3)の各項に２つ以上の物理量の積の形が含まれているために、一種の分散効果が生じる。そこで、積分することにより生じる分散効果を考慮し補正するために各項に補正係数を乗じた形で平面２次元モデルにおける k,ε 方程式、及び $\overline{\nu_t}$ と $\overline{k},\overline{\varepsilon}$ の

関係式を示すと次式の様になる。

$$\frac{\partial \overline{k}}{\partial t} + \beta_{kHA}\,\overline{U_i}\,\frac{\partial \overline{k}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta_{kHD}\,\frac{\overline{\nu_t}}{\sigma_k}\,\frac{\partial \overline{k}}{\partial x_i}\right) + \beta_{kHP}\,P_H + C_k\,\frac{U_*^3}{h} - \overline{\varepsilon} \tag{12}$$

$$\frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial t} + \beta_{\varepsilon HA}\,\overline{U_i}\,\frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta_{\varepsilon HD}\,\frac{\overline{\nu_t}}{\sigma_\varepsilon}\,\frac{\partial \overline{\varepsilon}}{\partial x_i}\right) + \beta_{\varepsilon HP}\,C_{1\varepsilon}\left(\frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{k}}\right)P_H + C_\varepsilon\,\frac{U_*^4}{h^2} - \beta_{2\varepsilon}\,C_{2\varepsilon}\,\frac{\overline{\varepsilon}^2}{\overline{k}} \tag{13}$$

$$\overline{\nu_t} = \beta_{\nu_t}\,C_\mu\,\frac{\overline{k}^2}{\overline{\varepsilon}} \quad (14),\qquad \text{ここで、}\quad P_H = \overline{\nu_t}\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}\ ,\ i, j = 1, 2$$

$U_1, U_2, k, \varepsilon, \nu_t$に式(4)-(7)を仮定し、式(8)-(11)を用いて式(1)-(3)を鉛直方向に積分して求められた各係数の算定式を図-1に示す。算定式中のξに関する定積分には発散するものがあるが、それらに関してはξ_s（式(8)より流速係数φを与えて逆算）からξ=0.9まで解析的に積分を行いξ=0.9～1の区間についてはξ=0.9での値をξ=1までとるものとして$\xi=\xi_s$～1の区間の積分を行った。そのため、β_{kHD}以外の各係数は流速係数φの関数になる。また、l_*については祢津[2)]により得られているl_*=0.5を採用した。φ= 10, 15, 20の各係数の計算値を表-1に示す。それによると、φによりかなり値の変化する係数があることが分かった。

■ $\beta_{kHA} = 1 + \frac{1}{\kappa\varphi}\left[1 + \int_0^1 \frac{exp(-\xi/l_*)\,ln\,\xi}{l_*\{1 - exp(-1/l_*)\}}\,d\xi\right]$

■ $\beta_{kHD} = \frac{6\,l_*\{exp(-1/l_*) + 2\,l_*\,exp(-1/l_*) + 1 - 2\,l_*\}}{1 - exp(-1/l_*)}$

■ $\beta_{\varepsilon HA} = \dfrac{\int_0^1 \frac{exp(-2\xi/l_*)}{\xi(1-\xi)}(ln\,\xi + 1)\,d\xi}{\kappa\varphi\int_0^1 \frac{exp(-2\xi/l_*)}{\xi(1-\xi)}\,d\xi}$

■ $\beta_{\varepsilon HP} = 1 + \frac{2}{\kappa\varphi}\int_0^1\left[\frac{exp(-\xi/l_*)}{l_*\{1 - exp(-1/l_*)\}} - 1\right](ln\,\xi + 1)\,d\xi + \frac{1}{\kappa^2\varphi^2}\int_0^1 \frac{exp(-\xi/l_*)}{l_*\{1 - exp(-1/l_*)\}}(ln\,\xi + 1)^2\,d\xi$

■ $\beta_{2\varepsilon} = \dfrac{l_*\{1 - exp(-1/l_*)\}\int_0^1 \frac{exp(-3\xi/l_*)}{\xi^2(1-\xi)^2}\,d\xi}{\left\{\int_0^1 \frac{exp(-2\xi/l_*)}{\xi(1-\xi)}\,d\xi\right\}^2}$

■ $\beta_{\varepsilon HD} = \dfrac{3\,l_*\{1 - exp(-2/l_*)\}}{\int_0^1 \frac{exp(-2\xi/l_*)}{\xi(1-\xi)}\,d\xi}$

■ $\beta_{\nu_t} = \dfrac{\int_0^1 \frac{exp(-2\xi/l_*)}{\xi(1-\xi)}\,d\xi}{6\,l_*^2\{1 - exp(-1/l_*)\}^2}$

■ $\beta_{kPH} = 1 + \frac{1}{3\kappa\varphi} + \frac{7}{18\,\kappa^2\varphi^2}$

■ $C_k = \frac{1}{\kappa}\int_0^1 \frac{1-\xi}{\xi}\,d\xi$

■ $C_\varepsilon = \frac{C_{1\varepsilon}}{\kappa^2 D}\int_0^1 \frac{exp(-\xi/l_*)}{\xi^2}\,d\xi$

図-1　各係数の算定式

3.結論

U, k, ε, ν_tの鉛直分布形を仮定することにより平面２次元k-ε乱流モデルにおける補正係数を算定した。これらの補正係数を用いることによりν_t, k, εの鉛直平均値をより正確に求めることができると思われる。今後は、補正の効果についてシミュレーションにより検討を行いたい。最後に九州大学名誉教授椿東一郎先生に多くの示唆を頂いた。また、本研究は（財）服部報公会の補助の下に行われた。記して謝意を表します。

表-1　各係数の計算値

φ	$\beta_{\nu t}$	β_{kHA}	$\beta_{\varepsilon HA}$	β_{kHD}	$\beta_{\varepsilon HD}$	β_{kHP}	$\beta_{\varepsilon HP}$	$\beta_{2\varepsilon}$	C_k	C_ε
10	0.48	1.13	1.01	0.94	1.77	1.11	1.29	1.88	1.50	5.07
15	1.87	0.96	0.79	0.94	0.45	1.07	0.94	2.57	6.50	80.59
20	3.59	0.94	0.70	0.94	0.24	1.05	0.90	6.72	11.50	701.24

［参考文献］ 1). Rastogi, A. K., and Rodi, W. : Predictions of Heat and Mass Transfer in Open Channels, J. Hydr. Div., ASCE, vol. 104, No. HY3, 1978　2). 祢津　家久：開水路乱流の乱れ強度に関する研究, 土木学会論文報告集, 第261号, pp. 67-76, 1977