

II-320

非線形応力方程式モデルの有効性に関する一考察

東京大学 大学院 学生員 常山 修治
 東京大学 工学部 正 員 河原 能久

1.はじめに 工学的な問題における乱流場の数値解析では乱流モデルを使用することが多く、そのモデルの適用性や信頼性の向上が重要な課題となっている。応力方程式モデルはレイノルズ応力の生成過程を正確に表現することができるために、乱流モデルの研究の中心になっている。これまで応力方程式モデル中の圧力-歪速度相関項をレイノルズ応力の線形結合で表現する Launder-Reece-Rodi (LRR) モデル¹⁾ が広く使用されてきたが、物理量としての実現性 (realizability) や壁面効果の取扱いなどに問題を有している。一方、最近では圧力-歪速度相関項に非線形性を取り入れたり、低レイノルズ数流れへの拡張をはかったモデルなどが提案されている。本報告は非線形モデルの1つである Speziale-Sarkar-Gatski (SSG) モデル²⁾ を取り上げ、実験結果、DNSデータ、およびLRRモデルとの比較を行い、モデルの有効性を考察するものである。本報告は、第一段階のものであり、平行平板間の十分に発達した乱流場を解析対象とする。

2.応力方程式モデルの概要 応力方程式モデルは、連続式およびレイノルズ方程式を前提とし、レイノルズ応力に関する輸送方程式(1)で表わされる。

$$U_k \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = D_{ij} + P_{ij} + \phi_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

ここで、左辺は移流項、 D_{ij} は拡散項、 P_{ij} は生成項、 ϕ_{ij} は圧力-歪速度相関項、 ε_{ij} は散逸項を表わす。

各項のモデル化にあたり、生成項 P_{ij} はモデル化を不要とし、式(2)で記述される。さらに、散逸項 ε_{ij} は高レイノルズ数の流れにおける小スケールの渦運動が局所等方的であるという仮定から、一般にエネルギー散逸率 ε を用いて式(3)でモデル化されている。なお、 ν は水の動粘性係数である。

$$P_{ij} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) \quad (2), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon, \quad \varepsilon = \nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (3)$$

拡散項 D_{ij} は、Daly-Harlowによるモデルを用いており、 k は乱流の運動エネルギーを表わしている。

$$D_{ij} = c_s' \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) \quad (4)$$

圧力-歪速度相関項 ϕ_{ij} は、LRR モデル、SSG モデルとして、それぞれ式(5)、(6)によって表わされる。

・LRRモデル

$$\phi_{ij} = \alpha_1 \varepsilon b_{ij} + \alpha_2 k S_{ij} + \alpha_3 k \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} P_{rod} \delta_{ij} \right) + \alpha_4 k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \quad (5)$$

・SSGモデル

$$\phi_{ij} = \left(\beta_1 \varepsilon + \beta_1' P_{rod} \right) b_{ij} + \beta_2 \varepsilon \left(b_{ik} b_{jk} - \frac{1}{3} II \delta_{ij} \right) + \beta_3 k S_{ij} + \beta_4 k \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} P_{rod} \delta_{ij} \right) + \beta_5 k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \quad (6)$$

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i u_j}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij}, \quad P_{rod} = - \overline{u_i u_l} \frac{\partial U_k}{\partial x_l}, \quad II = b_{ik} b_{il},$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right), \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

エネルギー散逸率 ε の方程式は式(7)で表わされる。

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial U_k \varepsilon}{\partial x_k} = c_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (c_{\varepsilon 1} P_{rod} - c_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad (7)$$

式中のモデル定数は表-1で示される。なお、定数内の f_w は壁面の効果を表わす関数(wall proximity function)であり、平行平板間の流れにおいては式(8)となる。D, y は図-1の座標系に示すように、それぞれ平行平板間の距離、底面からの高さである。

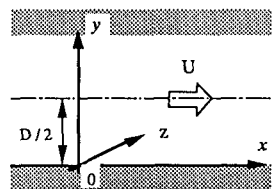


図-1 座標系

$$f_w = \frac{C_\mu^{3/4} k^{3/2}}{\kappa \varepsilon} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{D-y} \right) \quad (8)$$

3. 計算結果と考察 解析対象は、図-1に示す座標系をもつ平行平板間の十分に発達した乱流を対象とした。壁面の近傍での境界条件は、wall-function法で与えた。また、乱流の運動エネルギー k は、壁近くでの局所平衡の仮定から各レイノルズ応力に配分し、表-2に示すように決めた。

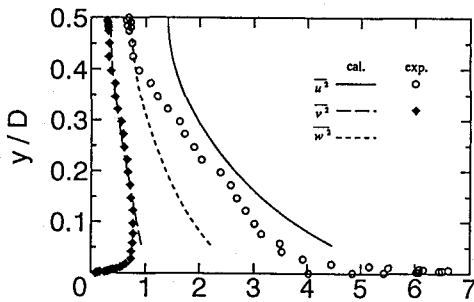
結果の検討には、計測結果の精度が高いと考えられているNiederschulte³⁾の実験結果と、Kim⁴⁾のDNSデータを用いた。計算結果との比較は図-2、図-3に示している。なお、Niederschulteの実験では、 $\overline{w^2}$ が示されていない。これらから、LRRモデルに比べSSGモデルが良好な結果を示すことが明らかである。 $\overline{v^2}$ はLRRモデル、SSGモデル共に良く再現されているが、中央軸付近では $\overline{v^2}$ 、 $\overline{w^2}$ がほぼ等しい値を示すというDNSデータの結果をLRRモデルは表わしていない。また、両モデルとも $\overline{u^2}$ の中央軸付近の再現性に課題を残している。これには、拡散項に用いたDHモデルの妥当性が関与していると考えられる。今後の研究では拡散項についての考察が必要である。

表-1 モデル定数

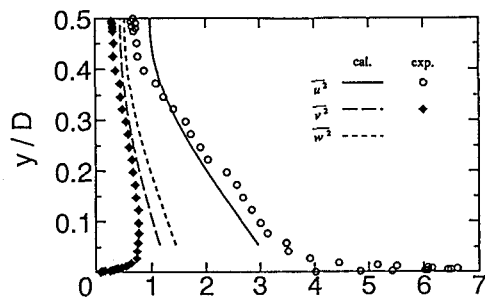
C_s'	C_μ	C_ε	$C_{\varepsilon 1}$	$C_{\varepsilon 2}$
0.22	0.09	0.15	1.44	1.92
α_1	α_2	α_3	α_4	
$-(3.0 - f_w)$	0.364	1.745	$1.309 - 0.24 f_w$	
β_1	β_1	β_2	β_3	β_4 β_5
-3.4	-1.80	4.2	$0.8 - 1.3 II^{1/2}$	1.25 0.40

表-2 壁近傍での k の配分

	$\overline{u^2}/k$	$\overline{v^2}/k$	$\overline{w^2}/k$	$-\overline{uv}/k$
LRRモデル	1.18	0.24	0.58	0.23
SSGモデル	1.07	0.41	0.52	0.32

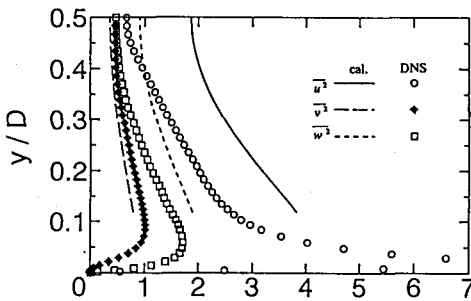


(a) LRRモデルによる計算結果との比較

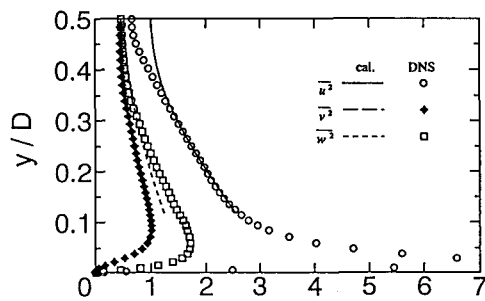


(b) SSGモデルによる計算結果との比較

図-2 Niederschulteの実験結果 (Re = 36678)



(a) LRRモデルによる計算結果との比較



(b) SSGモデルによる計算結果との比較

図-3 KimによるDNSデータ (Re = 15780)

参考文献

- 1) Launder, B.E. et al., J.Fluid Mech. Vol.68, 1975.
- 2) Speziale, C.G. et al., J.Fluid Mech. Vol.227, 1991.
- 3) Niederschulte, M.A., Ph.D. Dissertation, 1989.
- 4) Kim, J., Unpublished work, 1989.