II-266　管路の流れの抵抗に関する総合的研究

日本大学工学部　正会員　安　田　禎　輔

まえがき　壁面抵抗や内部抵抗は大別して３つの方法で表すことができる．第１の方法は $\tau_0=\rho g\ RI$ のように動水勾配Ｉで表す方法であり，これらの式は流れの全ての領域で成立する．第２の方法は $\tau_0=f'\rho V^2/2$ のように平均流速Ｖで表す方法である．本式は粗面乱流に対する式として考えられるが，f' をReynolds数などの関数とすれば滑面乱流や層流の抵抗も表すことができる．第３の方法はNewtonの粘性の法則のように速度勾配du／dyで表す方法で，この方法には厳密な意味で層流に対する式きりない．もっとも，乱流に対しては Prandtlの混合距離理論による $\tau=\rho l^2(du/dy)^2$ があるが，本式を解くには $l=\kappa y$ や壁面近傍における仮定などが必要であり，その解には管軸で $du/dy=0$ とならないなどの若干の矛盾がある．

本報では，以上の各表現法による壁面抵抗や内部摩擦抵抗の一般式を示し，これらから従来の主な式や結果を得ることができ，有機的に関係付けることができることを示す．

１．第１の表現による壁面抵抗

等流における壁面抵抗 τ_0 や内部抵抗 τ は，流れ方向の力の釣合の条件より

$$\tau_0=\rho g\ RI \qquad (1), \qquad \tau=\frac{1}{2}\rho g r I \qquad (2)$$

となる．これらは τ_0 や τ をＩで表す第１の表現法で，本式の誘導条件には等流であるという条件以外，流れに対して何の条件も入っていないので，全ての領域の流れに対して成立する．

２．第２の表現による壁面抵抗

τ_0 をBuckinghamの定理によって求めると，次に示す第２の表現法による τ_0 の一般式が求まる．

$$\tau_0=\lambda'\left(\frac{\rho\nu^2}{R^2}\right)^{1-m}\left(\frac{\rho V^2}{2}\right)^m \qquad (3)$$

（２）と（３）式とより平均流速を求めると次式となる．

$$V=\frac{\sqrt{2}}{\nu^{2\alpha-1}}\left(\frac{g}{\lambda'}\right)^{\alpha}R^{\beta}I^{\alpha} \qquad (4)$$

$$\alpha=1/(2m), \qquad \beta=3\alpha-1$$

ここで，指数ｍ，α および λ' は流れの領域によって定まる定数であり，これを Table 1 に示す．

Table 1　Empirical constants

Region	Const	α	m	λ'
Laminar flow		1.0	0.50	$2\sqrt{2}$
Turbulence	Smooth pipe	0.570	0.877	0.04851
Turbulence	Transition			
Turbulence	Rough pipe	0.50	1.0	f'

３．流速分布式と内部摩擦抵抗

平均流速は，多くの実験式や（４）式で示されるように，ＲまたはＤのベキ乗に比例するので，流速分布式は管軸からの距離ｒのベキ乗の関数となる．流速は管中心で u_{max}，$du/dy=0$ となり，管壁で u_{min} となる．したがって，流速分布式は次式となる．

$$u=u_{min}+\Delta u\left\{1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\right\} \qquad (5)$$

$$\Delta u=u_{max}-u_{min}$$

（５）式を微分し，これと（４）式とよりＩを求め，（２）式に代入すれば，次に示す第３の表現によるτの一般式が求まる．

$$\tau=\frac{\lambda'}{2}\left(\frac{2^{n-0.5}R^{n-\beta}}{n\Delta u/V}\right)^{1/\alpha}\rho\left(\nu^{2\alpha-1}r^{\alpha+1-n}\right)^{1/\alpha}\left(-\frac{du}{dy}\right)^{1/\alpha} \qquad (6)$$

本式に層流の条件：$\alpha=1.0$ ，$\beta=2.0$ ，$\lambda'=2\sqrt{2}$，$u_{max}/V=2$，$n=2$ を代入すれば，Newtonの粘性抵抗の式が得られる．

４．諸式の有機的関係

（６）式で示したように，各一般式（３）～（６）に Table１の流れの条件を代入すれば，Fig.１に示すように，従来の主な式や結果を得ることができ，これらは互いに有機的に関係付けられる．

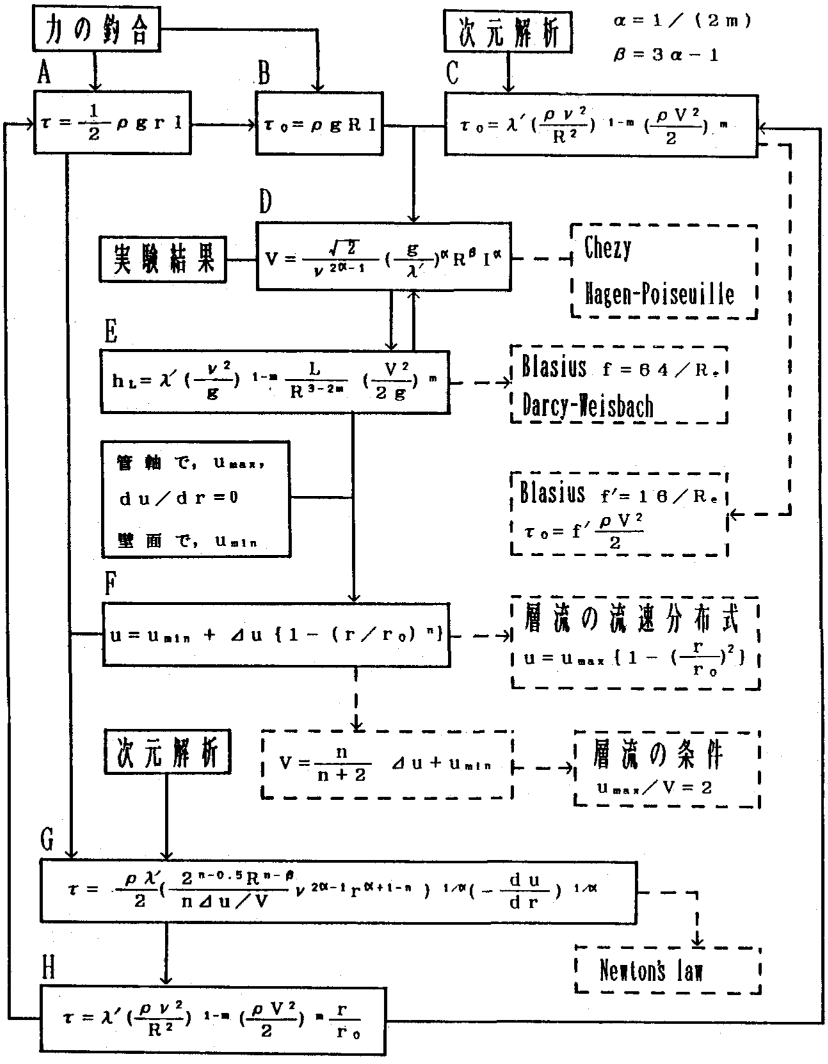

Fig. 1 Reiation among each equation of τ

まとめ　τやτ_0は大別して３つの方法で表すことができ，各表現法による一般式を求めることができた．これらの一般式に流れの条件を代入すれば，Fig.１に示したように従来の主な式や結果を得ることができる．これらの新旧諸式は互いに関係付けられ，理論的に閉じていることが示された．