

II-147

任意直交座標系による跳水を伴う2次元流れ計算法

岐阜大学工学部 正員 河村三郎

岐阜大学工学部 正員 中谷 剛

中部電力 正員 桜井友彰

1. はじめに 本研究では既往のように常流区間と射流区間を分けるといった限られた条件内での数値計算法ではなく、常流と射流の混在する流れにも対応できるような数値計算法を開発することを目的としている。計算には衝撃波獲得法の中からMacCormack法を採用した。しかし、水理学的に不連続な跳水のような流れを計算する場合、数値振動が生じるのでこれを抑えるためにMacCormack法の差分スキームをTVD形式に書き換えて数値計算をおこなうことにした¹⁾²⁾³⁾。

2. 任意直交座標系における支配方程式 一般化された座標と物理座標の間に1価の関係があると仮定すると $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ となり、関数関係が与えられると支配方程式を ξ , η に関して対応する方程式に変換することができる。2次元浅水方程式を任意直交座標系へ座標変換を行ったものを次に示す⁴⁾。

$$U_t + F_\xi + G_\eta = (\nu R_\xi)_\xi + (\nu T_\eta)_\eta + S_\xi + C^\xi + C^\eta \quad (2.1)$$

$$U = \begin{pmatrix} h/J \\ hu/J \\ hv/J \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} u^\xi h/J \\ \left\{ u^\xi u h + \xi_x \left(\frac{1}{2} g h^2 + g h z \right) \right\} / J + \{ (\nu \xi_x)_x + (\nu \xi_y)_y \} u h/J \\ \left\{ u^\xi v h + \xi_y \left(\frac{1}{2} g h^2 + g h z \right) \right\} / J + \{ (\nu \xi_x)_x + (\nu \xi_y)_y \} v h/J \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} u^\eta h/J \\ \left\{ u^\eta u h + \eta_x \left(\frac{1}{2} g h^2 + g h z \right) \right\} / J + \{ (\nu \eta_x)_x + (\nu \eta_y)_y \} u h/J \\ \left\{ u^\eta v h + \eta_y \left(\frac{1}{2} g h^2 + g h z \right) \right\} / J + \{ (\nu \eta_x)_x + (\nu \eta_y)_y \} v h/J \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 \\ (\xi_x^2 + \xi_y^2) u h/J \\ (\xi_x^2 + \xi_y^2) v h/J \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 0 \\ (\eta_x^2 + \eta_y^2) u h/J \\ (\eta_x^2 + \eta_y^2) v h/J \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\nu(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) h u/J \\ 2\nu(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) h v/J \end{pmatrix}$$

$$C^\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\eta_y u^\xi / J) n^2 g \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} / J \\ -(-\eta_x u^\xi / J) n^2 g \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} / J \end{pmatrix}$$

$$C^\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ -(-\xi_y u^\eta / J) n^2 g \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} / J \\ -(\xi_x u^\eta / J) n^2 g \sqrt{u^2 + v^2} / h^{1/3} / J \end{pmatrix}$$

$$\xi_x = y_\eta J, \quad \xi_y = -x_\eta J, \quad \eta_x = -y_\xi J, \quad \eta_y = x_\xi J, \quad J = 1/(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)$$

$$x_\xi = \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}, \quad x_\eta = \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2\Delta\eta}$$

$$y_\xi = \frac{y_{i+1,j} - y_{i-1,j}}{2\Delta\xi}, \quad y_\eta = \frac{y_{i,j+1} - y_{i,j-1}}{2\Delta\eta}$$

$$u^\xi = \xi_x u + \xi_y v, \quad u^\eta = \eta_x u + \eta_y v$$

ここで、文字の右下にある添え字は偏微分を表す。 h : 水深, u : x 軸方向の流速, v : y 軸方向の流速, g : 重力加速度, n : 粗度係数, z : 河床高, ν : 渦動粘性係数。ここで、 S に関して ξ 方向運動方程式中で $S = 2\nu(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) h u/J$ より $(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) = -J^2(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)$ であり、もしも格子生成において境界上で格子が直交するようにすれば $x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0$ であり $S = 0$ となる。 η 方向運動方程式中でも同様に $S = 0$ となり、よって、基礎方程式は次式の形となる。

$$U_t + F_\xi + G_\eta = (\nu R_\xi)_\xi + (\nu T_\eta)_\eta + C^\xi + C^\eta \quad (2.2)$$

2次元の計算は時間分割法を用いて行った⁵⁾。式(2.2)を次のように、 ξ 方向と η 方向の1次元の方程式に分割する。

$$\xi \text{ 平面 } U_t + F_\xi = (\nu R_\xi)_\xi + C^\xi, \quad \eta \text{ 平面 } U_t + G_\eta = (\nu T_\eta)_\eta + C^\eta$$

1次元スキームの演算子を $L_\xi(\Delta t)$, $L_\eta(\Delta t)$ の様に表すと2次精度を保つ組み合わせは次のように表される。

$$S = \frac{1}{2} \{ L_\xi(\Delta t) L_\eta(\Delta t) + L_\eta(\Delta t) L_\xi(\Delta t) \}$$

3. 計算結果 計算モデルとしては、河道拡幅部の跳水を伴う流れを扱った。図-1に計算領域の概略を示した。上流側直線部(勾配1/100)2m, 拡幅部(勾配1/100)1m, 下流側直線部(水平勾配)6mとし、下流端は段落ちとした。計算は4.6(l/sec)の定常流量を上流側から与えて、初期水深として実験値から得られた等流水深0.038mを、またManningの粗度係数を0.0154とした。水路壁面では、slip conditionとして、壁面上でも壁面に沿った流速成

分はあるものとした。渦動粘性係数 ν は $0.001(\text{m}^2/\text{sec})$ として与えた。TVD項の導入についてその計算結果を図-2、図-3(河床勾配は全河床において1/100)に拡幅部とその上流、下流のそれぞれ1m部分を示している。TVD項を導入した場合、無意味な数値振動に関しては完全に制御することができた。数値計算による水位の結果を図-4に示した。拡幅部後半で跳水がはっきりと捕らえているのがわかる。図-5には縦断方向の水位を示した。上流側直線部、下流側直線部、拡幅部前半では水面形としてはかなり正確に表現することができた。しかし、跳水発生位置は、実験値と計算値で約0.5mの差が発生した。X方向流速の結果を図-6に示した。拡幅部後半では、跳水発生位置の違いがあり実験値と計算値では差が生じたが、その他の部分では計算値とほぼ合致し傾向は捕らえられていると考えられる。フルード数分布の結果を図-7に示した。拡幅部前半ではほぼ合致するが拡幅部後半では、跳水発生位置の違いがあり実験値と計算値では差が生じた。

4. おわりに TVD形式のMacCormack法を適用した保存則差分法は常流と射流の混在する流れの計算にも有効であることがわかった。また、任意直交座標系における計算ではある程度複雑な水路においても計算を行うことができることがわかった。今後改良していく点として側壁をnon-slip conditionとして取り扱ってゆくことが挙げられる。

参考文献 1) A.Harten:High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws,J. of Comp.Physics,49, pp.357-393,1983 2) 大宮司久明:圧縮性流れの数値スキームの基礎的考え,日本機械学会論文集(B編),57巻540号,1991,pp.2590-2515 3) Couston, D. M. :High Resolution Finite Volume Schemes and Computational Aerodynamics, Nonlinear Hyperbolic Equations Theory,Computation Methods, and Applications, Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vol.24, 1989,pp.63-74 4) C.A.J.Fletcher:Computational Techniques for Fluid Dynamics 2,pp.46-77 5) 日本機械学会:流れの数値シミュレーション,コロナ社,1991,pp.113-114



図-1 計算格子

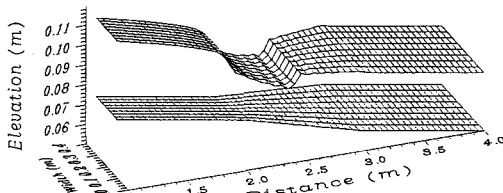


図-2 TVDを導入しない場合

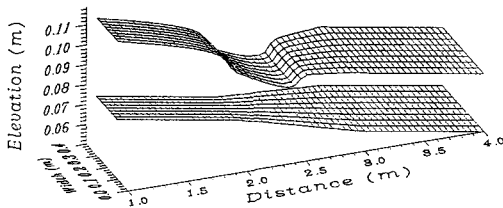


図-3 TVDを導入した場合

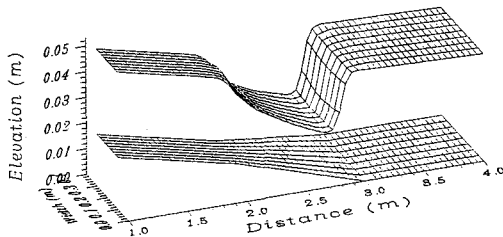


図-4 数値計算による水位

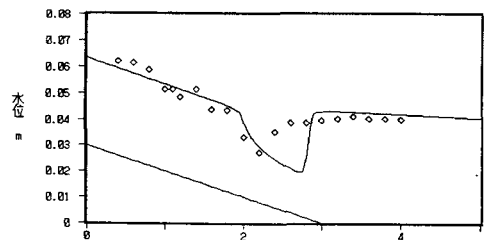


図-5 縦断方向の水位

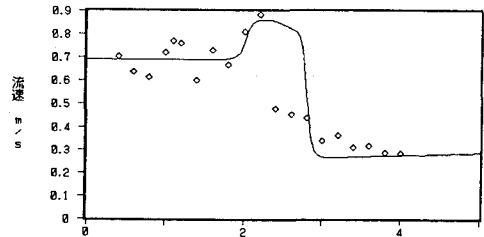


図-6 縦断方向のX方向流速

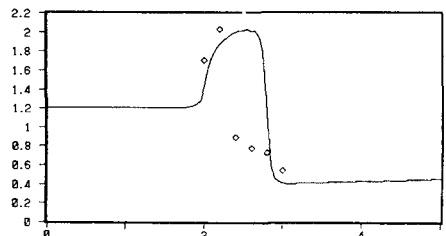


図-7 縦断方向のフルード数