

II-143

MacCormack法に基づく河川網不定流の行列解析

広島大学大学院 学生員 高橋 宏尚
 広島大学工学部 正員 常松 芳昭
 中電技術コンサルタント(株) 正員 金本 満
 鹿島建設(株) 正員 玉田 康一

1. はじめに: 近年、都市化の波が流域の中、上流部にまで及んでおり、このような地域を流下する比較的勾配の急な河川の流況把握が重要な課題となっている。山間盆地を流れる河川はトリー状の水路網であることが多くまた場所的に常流、射流が混在した流れが生じ低平地の河川網に比べて流況はかなり複雑なものとなっている。従って、このような複雑な流れを問題とする場合、河川網としての取扱いはもちろんのこと、常・射流をも取扱うことの出来る系統的な解析技法の開発が望まれる。

2. システムモデルの行列表示: 保存系の基礎方程式をMacCormack法により離散化を行なった。予測子段階と修正子段階を式(1)、(2)に示す。また、式(3)は人工粘性項であり、 k_v は定数である。ただし、 U , E , S は式(4)のようである。水路内部点に対する式(1)、(2)の他に、外部点、すなわち境界点に対する式には不定流の連続方程式をBox型の差分スキームで離散化した式(5)、(6)を用いた。ここで、 A_j^{n+1} , Q_j^{n+1} , A_j^{n+1} , Q_j^{n+1} のみが外部点の未知水理量である。式(5)、(6)は流水断面面積を従属変数として記述されていることを考慮し、これらの式をNewton-Raphson法により解くことができるように式(7)、(8)のように表わす。ただし、 j は枝番号 $A_j = A_j^{n+1}$, $Q_j = Q_j^{n+1}$, $A_j = A_j^{n+1}$, $Q_j = Q_j^{n+1}$, $\Delta x_j = \Delta x_2$, $\Delta x_j = \Delta x_N$ である。さらに式(7)、(8)を近似値まわりにテイラー展開するとその修正量に関して上流端では式(9)、下流端では式(10)が得られる。ただし Z_j^+ と Z_j^- は j 枝の上・下流端の水位、 Q_j^+ と Q_j^- は j 枝の上・下流端の流量であり、 Δ は修正量を表わしている。

単一河道に対する以上の式を e 本の枝 m 個の節点(そのうちソースは m_1 個シンクは m_2 個)を持つ河川網に拡張するため式(9)、(10)を単純に重ね合わせると式(11)のようになる。開水路網特有の連結構造より節点に関して流量、水位の連続条件が満足されなければならない。ここでは分・合流点でのエネルギー損失は小さいものとして無視すれば、節点の水位条件は式(12)で表わされる。

$$\bar{U}_i = \bar{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\bar{E}_i^n - \bar{E}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{2} (S_i^n + S_{i-1}^n) + \Delta t (V_i - V_{i-1}) \quad (i=2 \cdots N-1) \quad (1)$$

$$\bar{U}_i^{n+1} = \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} (\bar{U}_i^n + \bar{U}_i^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x_i} (\bar{E}_{i+1}^n - \bar{E}_i^n) \\ & + \frac{\Delta t}{2} (S_{i+1}^n + S_i^n) + \Delta t (V_{i+1} - V_i) \end{aligned} \right\} \quad (i=2 \cdots N-1) \quad (2)$$

ただし $\bar{E}_i = E_i(U_i)$, $S_i = S_i(U_i)$, $V_i = V_i(U_i)$

$$V_i = k_v \left(\frac{Q_i}{A_i} \right) \frac{(U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}))}{\Delta x_i} \quad (3)$$

$$U = \begin{pmatrix} A \\ Q/A \end{pmatrix} E = \begin{pmatrix} Q \\ Q^2/(2A^2) + gZ \end{pmatrix} S = \begin{pmatrix} 0 \\ -gSf \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} (A_j^{n+1} + A_j^{n+1} - A_j^n - A_j^n) + \frac{\Delta t}{2 \Delta x_2} (Q_j^{n+1} + Q_j^{n+1} - Q_j^n - Q_j^n) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} (A_j^{n+1} + A_j^{n+1} - A_j^{n-1} - A_j^{n-1}) + \frac{\Delta t}{2 \Delta x_N} (Q_j^{n+1} + Q_j^{n+1} - Q_j^{n-1} - Q_j^{n-1}) = 0 \quad (6)$$

$$G_j^+ = A_j^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x_j^+} Q_j^+ + C_j^+ = 0 \quad (7)$$

$$G_j^- = A_j^- + \frac{\Delta t}{\Delta x_j^-} Q_j^- + C_j^- = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial A_j^+}{\partial Z_j^+} \Delta Z_j^+ - \frac{\Delta t}{\Delta x_j^+} \Delta Q_j^+ = -G_j^+ \quad (9)$$

$$\frac{\partial A_j^-}{\partial Z_j^-} \Delta Z_j^- + \frac{\Delta t}{\Delta x_j^-} \Delta Q_j^- = -G_j^- \quad (10)$$

$\bar{D}$ は出連結行列、 $\bar{D}$ は入連結行列を表わす。また T は転置行列を表わす。 Z は節点定義量、 Z^+ 、 Z^- は枝定義量である。ソース、シンクの特性から $\bar{D}_+=\bar{D}_-=0$ に留意し式(12)を式(11)に代入することにより境界方程式は式(13)、(14)のように定式化される。また、中間ノードに対する流量連続式、ソース、シンクに関する条件式は式(15)～(17)のように定式化される¹⁾。式(13)～(17)をまとめて行列表示すると式(18)のようになる。式(18)の左辺の係数行列は $(m+2e)$ 行 $(m+2e)$ 列の非特異行列であるから未知量ベクトルは連立1次方程式を解くことによって求めることができる。システムモデルの式(18)は外部点に関する未知量のみで記述されているので、これはいわゆる集中型モデルである。

3. 数値計算例：本手法を広島県三次盆地を流れる江の川河川網の洪水解析に適用した。図1は河川網の平面図である。図2は対象河川網をグラフ表示したものである。昭和58年7月23日の洪水を対象として図1のNo.1～No.4の水位観測地点で囲まれた区間について計算を行なった。境界条件としては、流量観測データがないためNo.1～No.4の地点の水位ハイドログラフを用いた。得られた結果より枝番号Ⅲ→Ⅳ→Ⅴに沿ってフルード数の場所的、時間的变化を図3に示す。これより西城川と馬洗川の合流点付近でフルード数が1を超え射流域が生じる場合もみられるが、全計算時間にわたって本手法では比較的安定した数値解が得られた。一方、すでに提案されている特性曲線法、ならびに4点陰形式差分法²⁾では解が発散し計算不能であった。常・射流の混在する複雑な流況が生じる場合でも、提示した系統的な行列演算による解析手法は有用であることが伺われる。なお計算時間は洪水解析の対象時間が24時間で $\Delta t=10(\text{Sec})$ の場合約5分であった。使用した電子計算機は広島大学情報処理センターのHITAC-M680Hである。

最後に、洪水資料の収集等に御協力頂いた建設省三次工事事務所の関係各位に深謝致します。

参考文献：1) 金本満、常松芳昭：グラフ理論による河川網不定流の水理解析、土木学会論文集、NO. 429/II-15、1991。2) 金本満、常松芳昭、金丸昭治：開水路網における洪水流の数値解析法の比較、水工学論文集、第36巻、1992。

$$\begin{bmatrix} P_z^+, P_z^-, 0, 0 \\ 0, 0, P_z^-, P_z^- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Z^+ \\ \Delta Q^+ \\ \Delta Z^- \\ \Delta Q^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G^+ \\ -G^- \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$Z^+ = \bar{D}^T \cdot Z, \quad Z^- = \bar{D}^T \cdot Z \quad (12)$$

$$\bar{P}_z \bar{D}^T \Delta Z^+ + \bar{P}_z \bar{D} \Delta Z^- + \bar{P}_q \Delta Q^+ = -\bar{G}^+ \quad (13)$$

$$\bar{P}_z \bar{D} \Delta Z^+ + \bar{P}_z \bar{D}^T \Delta Z^- + \bar{P}_q \Delta Q^- = -\bar{G}^- \quad (14)$$

$$\text{ソース} : \bar{D}_+ \cdot \Delta Q^+ = -F_+ \quad (15)$$

$$\text{中間ノード} : \bar{D}_o \Delta Q^+ - \bar{D}_o \Delta Q^- = -F_o \quad (16)$$

$$\text{シンク} : E \Delta Z^- = -F_- \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{P}_z \bar{D}^T & \bar{P}_z \bar{D} & 0 & \bar{P}_q & 0 \\ 0 & \bar{P}_z \bar{D} & \bar{P}_z \bar{D}^T & 0 & \bar{P}_q \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{D}_o & -\bar{D}_o \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta Z^+ \\ \Delta Z^- \\ \Delta Z^- \\ \Delta Q^+ \\ \Delta Q^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G^+ \\ -G^- \\ -F_+ \\ -F_o \\ -F_- \end{bmatrix} \quad (18)$$

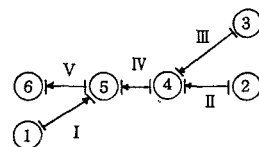
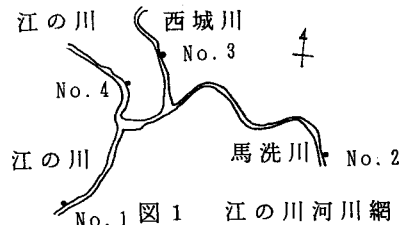


図2 グラフ表示

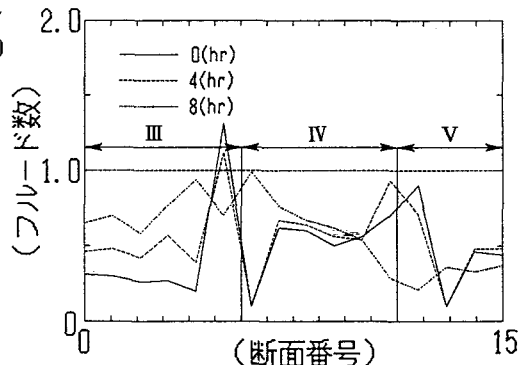


図3 フルード数の場所的、時間的变化