

II-140

補正項を導入した風上差分の高精度化について

九州大学大学院 学生員 ○塩見 尚潔

九州大学工学部 正 員 朝位 孝二

九州大学工学部 正 員 小松 利光

1.はじめに

現在、拡散シミュレーションにおいて種々の移流項のための高精度計算スキームが開発され、良好なシミュレーションが可能となっている¹⁾。しかしながら、一般的に高精度計算スキームはスキーム中に取り込む格子点が多く境界付近の取り扱いには工夫が必要であることが多い。一方、風上差分法は使用する点が少なく取り扱いが容易であるが、大きな数値拡散を引き起こしてしまう。打ち切り誤差項の筆頭項を補正拡散項として基礎式から差し引いて計算を行えば、風上差分を用いても計算精度はある程度まで改善される²⁾。しかしながら、この方法による誤差の改善には限界があり不必要なひずみや振動が発生する²⁾。本研究は各計算点ごとに拡散の長さスケールを定義し、このスケールと格子間隔との比に従って補正を調節し、不必要な振動のあらわれない補正法を検討したものである。

2.補正拡散係数

(1) 式で表わされる1次元純粋移流方程式を風上差分で離散化すると無限に続く打ち切り誤差項が求められる。この無限に続く誤差項のうち、筆頭項から生じる数値拡散が支配的であるため高次の項を省略すれば風上差分の打ち切り誤差項は(2)式のように近似できる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (1) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \alpha(1-\alpha) \frac{\Delta x^2}{2! \Delta t} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (2)$$

ここで $\alpha = \frac{u \Delta t}{\Delta x}$: クーラン数

(2)式の右边が誤差を発生させる原因であり、この項を差し引くことによって誤差が大幅に軽減されることが期待される。よって、補正拡散係数は次のようになり、(1)式のかわりに(3)式を解けばよい。(3)式の右边を補正項と呼ぶことにする。

$$K_x = -\alpha(1-\alpha) \frac{\Delta x^2}{2! \Delta t} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (3)$$

この補正の効果を検討するため、初期条件として、ピーク値10、標準偏差264m、中心位置 $x=1400\text{m}$ のGauss型濃度分布とピーク値6.5、標準偏差200m、中心位置 $x=2400\text{m}$ のGauss型濃度分布を重ね合わせたものを使用し、流速 $u=0.5\text{ m/s}$ で9600sの間下流へ移流させるモデル計算を行った。

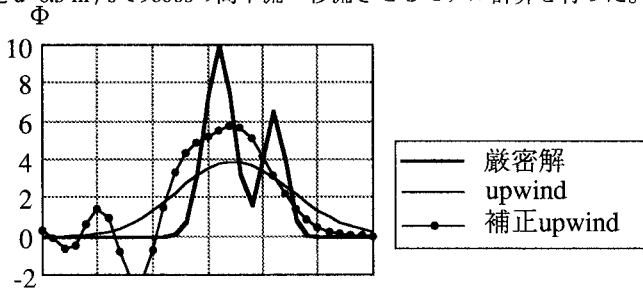
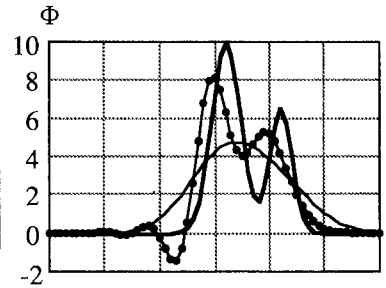
図-1 計算結果 ($\Delta x=200\text{m}, \Delta t=100\text{s}$)図-2 計算結果 ($\Delta x=100\text{m}, \Delta t=50\text{s}$)

図-1、2のようにこの補正により、ピーク値付近の数値拡散はかなり軽減されるが、裾野付近に振動を生じ全体的に位相のずれが見られる。これは負の拡散係数を与えているため数値不安定になるためと思われる。これを防ぐために、濃度勾配が緩やかなところ、及び急すぎるところでは補正は行わないこととする。拡散スケールと計算格子間隔の比をパラメータとして濃度勾配の緩急を判定する方法を導入した。

3.拡散スケールの決定と判定条件

3-1 Gauss型濃度分布による拡散スケール

計算に使用する3点の濃度の値が以下のようなあるGauss分布の一部であると仮定する。

$$\Phi_i = P \exp \left\{ -\frac{(x - \mu)^2}{2 \sigma_A^2} \right\}$$

この式の1階微分、2階微分はそれぞれ次のようになり

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x} = \left[-\frac{(x-\mu)}{\sigma_A^2} \right] P \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_A^2} \right\} = \frac{\Phi_{i+1} - \Phi_{i-1}}{2\Delta x} = A_i$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^2} = \left[-\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{(x-\mu)^2}{\sigma_A^4} \right] P \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_A^2} \right\} = \frac{\Phi_{i+1} - 2\Phi_i + \Phi_{i-1}}{\Delta x^2} = B_i$$

この3式より求まる σ_A を i 点の拡散スケールとする。

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{\Phi_i^2}{A_i^2 - B_i \Phi_i}}$$

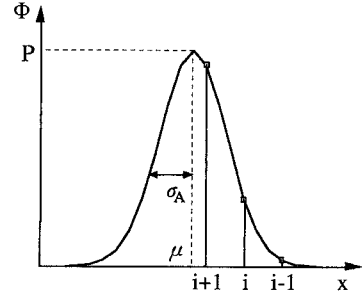


図-3 σ_A の概念図

3-2 曲率半径を用いた拡散スケール

計算に使用する3点を通る2次曲線の曲率半径 ρ と同じ ρ をもつような i 点にピークのある Gauss 分布を考えると以下ようになる。

よって、この σ_B を拡散スケールとする。

$$\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 = -\frac{1}{\sigma_B^2} P \exp \left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_B^2} \right\} = -\frac{1}{\sigma_B^2} \Phi_i$$

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\Phi_i}{|B_i|}}$$

この2通りの方法で求めた拡散スケール σ_A 及び σ_B と計算格子間隔 Δx でつくられる無次元パラメーター $\Delta x / \sigma$ が $0.1 \leq \Delta x / \sigma \leq 1.0$ の範囲にある計算格子点のみ補正項を導入する。

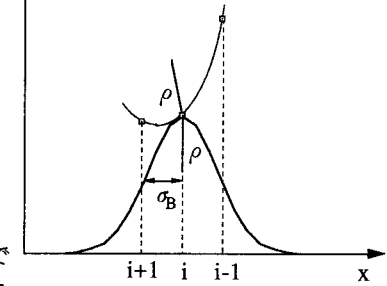


図-4 σ_B の概念図

4. 計算精度の比較

上述の補正方法の精度を比較するために、先に述べたモデル計算を行った。計算結果を図-5、6に示す。また、比較のために、移流項にQUICK、時間積分に2次精度Adams-Bashforth法を用いた差分方法による計算結果も示している。

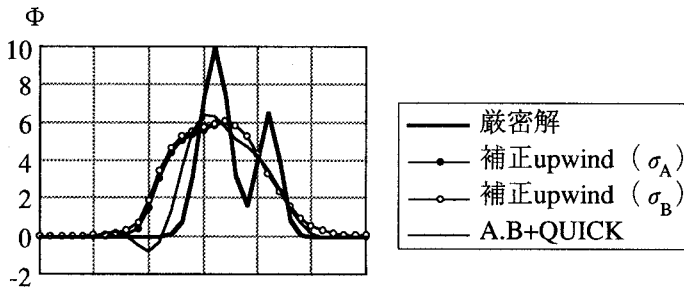


図-5 計算結果 ($\Delta x=200\text{m}, \Delta t=100\text{s}$)

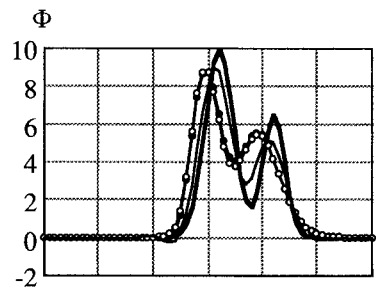


図-6 計算結果 ($\Delta x=100\text{m}, \Delta t=50\text{s}$)

5. おわりに

判定条件をつけて補正すると裾野付近の振動は抑えられたが、位相誤差は改善できていない。今後は、誤差項の高次の項まで含めた形で補正項を評価し、また σ_A と σ_B のどちらが適切な拡散スケールなのかを評価していく予定である。

6. 参考文献

- 1) 小松・大串・朝位：拡散シミュレーションにおける移流輸送の高精度計算法の開発, 土木学会論文集 No.456/II-21, pp.37-46, 1992.
- 2) 村上 健：非定常拡散方程式の数値計算方法, 第19回海岸工学講演会論文集, pp.265-269, 1972.