

II-139

高精度補間多項式(INDUS法)の境界近傍の処理について

九州大学大学院○学生員 水沼 道博

九州大学工学部 正 員 朝位 孝二

九州大学工学部 正 員 小松 利光

1. はじめに

著者らは、陽的に補間が可能で、なおかつ現在補間法として最も広く使用されているspline関数と同程度の精度をもつ補間法(INDUS法)を開発した¹⁾。INDUS法はspline関数と比べて、コンピューターの容量・計算時間が大幅に節約できるので、大容量のデータにも対応できるという利点を持つ。しかしながら、一区間の補間に前後合わせて8個のデータを必要とするため、境界近傍を補間するためには、境界外に最低3個の既知データが必要であった。本研究は、境界外にデータが与えられない場合におけるINDUS法の境界近傍の定式化について検討したものである。

2. 境界近傍の補間多項式の誘導

INDUS法による補間多項式は区分多項式であり、 $i-1 \sim i$ 区間を補間するためには $i-4 \sim i+3$ の8点の格子点データを必要とする。その式形は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 Y(\beta) = & (-0.02817C_{i-4} + 0.1639C_{i-3} - 0.60755C_{i-2} + 1.2004C_{i-1} \\
 & - 1.2004C_i + 0.60755C_{i+1} - 0.1639C_{i+2} + 0.02817C_{i+3})\beta^3 \\
 & + (0.05633C_{i-4} - 0.3559C_{i-3} + 1.407C_{i-2} - 2.2004C_{i-1} + 1.4008C_i - 0.4155C_{i+1} + 0.1357C_{i+2} - 0.02817C_{i+3})\beta^2 \\
 & + (-0.02817C_{i-4} + 0.19205C_{i-3} - 0.7996C_{i-2} + 0.7996C_{i+1} - 0.19205C_{i+2} + 0.02817C_{i+3})\beta + C_{i-1} \quad (1)
 \end{aligned}$$

($\beta = (t - t_i) / (t_{i+1} - t_i)$, $0 \leq \beta \leq 1$)

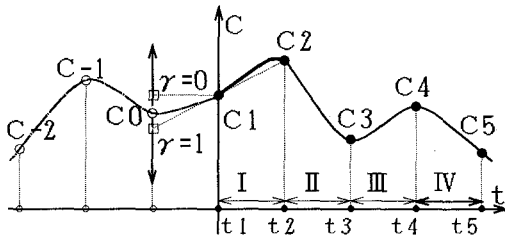


図1-a 記号説明(左側境界)

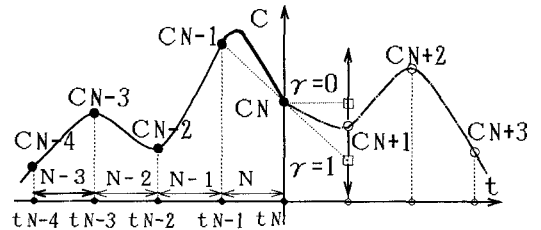


図1-b 記号説明(右側境界)

境界外にデータが与えられていない場合は、(1)式の適用可能区間は図-1 a中のIV区間から始まり図-1 b中のN-3区間までとなり、境界近傍の区間では(1)式をそのまま適用することはできない。今ここで、左側境界近傍について考える。境界外の値 C_0 を次のように表す。

$$C_0 = (\gamma + 1)C_{i-1} - \gamma C_2 \quad (2)$$

上式は γ が1のとき直線外挿の値をとり、 γ が0のときは C_1 の値をとる。以下に、 C_0 と既知データのみを用いて境界近傍の3区間を補間する方法を示す。

- ①区間Ⅲの補間：(2)式の C_0 の値と、 $C_1 \sim C_7$ の8個の計算格子点データを用いて(1)式により補間する。
- ②区間Ⅱの補間：計算格子点上の値 C_2 、 C_3 と、区間Ⅲの補間式を微分することによって得られる t_3 における勾配 C_3' 、および $C_0 \sim C_5$ の6点の値を用いて6-pointスキーム¹⁾より得られる t_2 における勾配 C_2' の4つの条件を用いて3次多項式を求める。
- ③区間Ⅰの補間：計算格子点上の値 C_1 、 C_2 と区間Ⅱの補間多項式より求められる t_2 における勾配 C_2' 、および C_0 、 C_1 、 C_2 の3点を通るように求めた2次式の t_1 上の勾配 C_1' の4つの条件を用いて3次多項式を求める。

右側境界の場合には、左側境界のⅠ～Ⅲ区間での操作と同様のことを、図1-bに示したN-2～N区間で行えばよい。

乱流の変動時系列データを用いて、境界付近の荷重係数 γ をパラメーターとしたまま補間計算を行い、最適な γ を求めることを試みた。図-2は、境界付近3区間のみの補間誤差の平均値と γ との関係を表したものである。 u' は実際の乱流の変動流速、 u_1 は補間値であり、 Δt は離散時間間隔、 T は乱流データのタイムスケールである。この図から、種々の離散時間間隔において、 $\gamma=1$ のとき補間精度が最もよいことが分かる。また、 γ を変化させることによる補間値の変動は区間Ⅰ、Nにおいて顕著で、区間Ⅱ、Ⅲ、N-1、N-2では無視できるほど小さいことが分かった。それぞれの区間における補間多項式の式形を以下に示す。

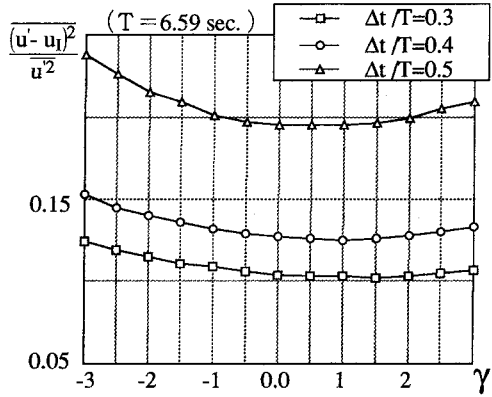


図-2 γ による誤差比較

$$Y_I(\beta) = (0.5820C_1 - 1.3616C_2 + 1.0331C_3 - 0.3095C_4 + 0.05633C_5)\beta^3 \\ + (-0.5820C_1 + 1.3616C_2 - 1.0311C_3 + 0.3095C_4 - 0.05633C_5)\beta^2 \\ + (C_2 - C_1)\beta + C_1 \quad (3)$$

$$Y_{II}(\beta) = (-0.2823C_1 + 0.8670C_2 - 0.9669C_3 - 0.3095C_4 + 0.8559C_5 - 0.1921C_6 + 0.02817C_7)\beta^3 \\ + (0.7003C_1 - 1.5054C_2 + 0.9338C_3 + 0.6190C_4 - 0.9123C_5 + 0.1921C_6 - 0.02817C_7)\beta^2 \\ + (-0.4180C_1 - 0.3616C_2 + 1.0331C_3 - 0.3095C_4 + 0.05633C_5)\beta + C_2 \quad (4)$$

$$Y_{III}(\beta) = (0.1076C_1 - 0.5794C_2 + 1.2004C_3 - 1.2004C_4 + 0.60755C_5 - 0.1639C_6 + 0.02817C_7)\beta^3 \\ + (-0.2432C_1 + 1.3507C_2 - 2.2004C_3 + 1.4008C_4 - 0.4155C_5 + 0.1357C_6 - 0.02817C_7)\beta^2 \\ + (0.1357C_1 - 0.7714C_2 + 0.7996C_5 - 0.1921C_6 + 0.02817C_7)\beta + C_3 \quad (5)$$

$$Y_{N-2}(\beta) = (-0.02817C_{N-6} + 0.1639C_{N-5} - 0.6076C_{N-4} + 1.2004C_{N-3} - 1.2004C_{N-2} + 0.5794C_{N-1} - 0.1076C_N)\beta^3 \\ + (0.05633C_{N-6} - 0.3559C_{N-5} + 1.407C_{N-4} - 2.2004C_{N-3} + 1.4008C_{N-2} - 0.3873C_{N-1} + 0.08007C_N)\beta^2 \\ + (-0.02817C_{N-6} + 0.1921C_{N-5} - 0.7996C_{N-4} + 0.7714C_{N-3} - 0.1357C_N)\beta + C_{N-3} \quad (6)$$

$$Y_{N-1}(\beta) = (-0.02801C_{N-5} + 0.1353C_{N-4} - 0.3927C_{N-3} + 0.1674C_{N-2} + 0.0963C_{N-1} + 0.1735C_N)\beta^3 \\ + (0.05602C_{N-5} - 0.3269C_{N-4} + 1.1923C_{N-3} - 0.3678C_{N-2} - 0.8313C_{N-1} + 0.1249C_N)\beta^2 \\ + (-0.02801C_{N-5} + 0.1916C_{N-4} - 0.7996C_{N-3} - 0.7996C_{N-2} + 1.7350C_{N-1} - 0.2984C_N)\beta + C_{N-2} \quad (7)$$

$$Y_N(\beta) = (-0.05633C_{N-4} + 0.4069C_{N-3} - 1.033C_{N-2} + 1.3613C_{N-1} - 0.5821C_N)\beta^3 \\ + (0.1127C_{N-4} - 0.8138C_{N-3} + 2.066C_{N-2} - 2.7226C_{N-1} + 1.1642C_N)\beta^2 \\ + (-0.05633C_{N-4} + 0.4069C_{N-3} - 1.033C_{N-2} + 0.3613C_{N-1} + 0.4179C_N)\beta + C_{N-1} \quad (8)$$

3. おわりに

境界付近の3区間では式(3)～(8)を用い、それ以外の区間では通常のINDUS法による補間式(1)を用いることによって、与えられた離散データ内のすべての区間の補間が可能となった。

<参考文献> 1) 小松ら：高精度な陽的補間多項式の開発，水工学論文集 第37巻，1993