II-137 非正方格子をもつ重み付差分法による潮流解析

九州産業大学　学生員　寺本哲治
九州産業大学　正会員　加納正道
九州産業大学　正会員　赤坂順三
東　和　大学　正会員　空閑幸雄

1．まえがき　前報[1]で陰形式重み付差分法が厳密解の分っている２次元バーガーズ方程式と比較して、クーラン数0.1～1.0の範囲でその解析解の精度が比較的よいことを述べた。実際の湾内の潮流を解析する場合、陰的解法では多大の計算時間と配列を必要とする。そこで、本報では陽的解法の差分モデルを考え、また厳密解に則したアダプティブ的なメッシュである非正方格子により解析を行うことにし、その定式化および重みの定め方について述べる。重み付差分法による数値解の精度検証は、前報[1]同様２次元バーガーズ方程式の厳密解との比較により示す。

2．基礎方程式　基礎方程式として三次元のレイノルズ方程式を海底から水面まで積分して鉛直方向の平均値として表示した二次元の運動方程式［式(1)にｘ方向のみ示す］および連続の式(2)を基礎式とする。

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{M}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{N}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial y}=-g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2 W_x\sqrt{W_x^2+W_y^2}$$
$$-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}M\sqrt{M^2+N^2}+fN+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) \quad (1) \qquad , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0 \quad (2)$$

ここに、$M=U(h+\zeta)$, $N=V(h+\zeta)$はおのおのｘ，ｙ方向の線流量、Ｕ，Ｖはそれぞれｘ，ｙ方向の平均流速、ζは水面の平均水面からの高さ、W_x, W_yはｘ，ｙ方向の風速成分、gは重力の加速度、fはコリオリの係数、εは水平方向の渦動粘性係数、ρ_a, ρ_wは空気および水の密度、$\delta=1$～1.5の補正係数、γ_b, γ_sは水底、水面における摩擦係数である。

$$\frac{M}{h+\zeta}=m \ , \quad \frac{N}{h+\zeta}=n \qquad (3) \ ,$$

$$-g(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2 W_x\sqrt{W_x^2+W_y^2}-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}M\sqrt{M^2+N^2}+fN=F_L \quad (4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+m\frac{\partial M}{\partial x}+n\frac{\partial M}{\partial y}=F_L \quad (5)$$

$$M^r(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\left\{\frac{(x-mt+y-nt)^{r-2i}}{(r-2i)!}\cdot\frac{(2\varepsilon t)^i}{i!}\right\} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}M(i,j,k)=&W_1\cdot M(i-1,j+1,k-1)+W_2\cdot M(i,j,k)\\&+W_3\cdot M(i+1,j-1,k-1)+W_4\cdot M(i-1,j,k-1)\\&+W_5\cdot M(i,j-1,k-1)\end{aligned} \quad (7)$$

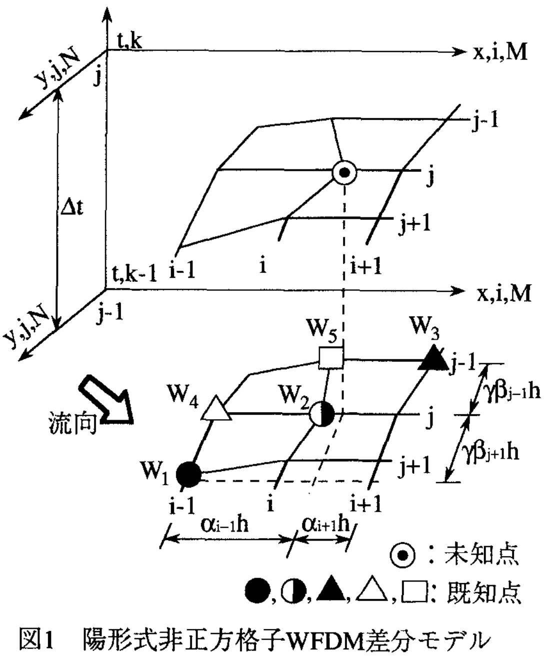

図1　陽形式非正方格子WFDM差分モデル

3．非正方格子重み付差分法の定め方及び解析手法　非正方格子をもつ重み付差分法の定め方も前報[1],[2]同様の考え方により求めることができる。但し前報では時間きざみ(Δｔ)ごとのメッシュは変わらなかったが、本報では、時間きざみ(Δｔ)ごとに厳密解に則したメッシュに変化させている所が異なる。以下に重み付差分法の定め方を簡単に述べることにする。いま、基礎式(1)において式(3),(4)のように表し、式(1)を式(5)と書き直す。ここで、F_Lを非同次項とみなしF_Lをゼロとおいた式は２次元バーガーズ方程式(同次方程式)である。この同次形の式を満たすｘ，ｙ，ｔの多項式は式(6)で表される。いま、同次形の式において原点を任意の点に移し、差分

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (-\alpha_1+\gamma\beta_1+F_*) & (-\alpha_2+F_*) & (\alpha_3-\gamma+F_*) & (-\alpha_4+F_*) & (-\alpha_5-\gamma+F_*) \\ \begin{matrix}(-\alpha_1+\gamma\beta_1+F_*)^2\\-2\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(-\alpha_2+F_*)^2\\-2\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(\alpha_3-\gamma+F_*)^2\\-2\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(-\alpha_4+F_*)^2\\-2\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(-\alpha_5-\gamma+F_*)^2\\-2\mu_*\end{matrix} \\ \begin{matrix}(-\alpha_1+\gamma\beta_1+F_*)^3\\-3!(-\alpha_1+\gamma\beta_1+F_*)\\\cdot\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(-\alpha_2+F_*)^3\\-3!(-\alpha_2+F_*)\\\cdot\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(\alpha_3-\gamma+F_*)^3\\-3!(\alpha_3-\gamma+F_*)\\\cdot\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(-\alpha_4+F_*)^3\\-3!(-\alpha_4+F_*)\\\cdot\mu_*\end{matrix} & \begin{matrix}(-\alpha_5-\gamma+F_*)^3\\-3!(-\alpha_5-\gamma+F_*)\\\cdot\mu_*\end{matrix} \\ \begin{matrix}(-\alpha_1+\gamma\beta_1+F_*)^4\\-4!(-\alpha_1+\gamma\beta_1+F_*)\\\cdot\mu_*/2+4!\mu_*^2/2\end{matrix} & \begin{matrix}(-\alpha_2+F_*)^4\\-4!(-\alpha_2+F_*)\\\cdot\mu_*/2+4!\mu_*^2/2\end{matrix} & \begin{matrix}(\alpha_3-\gamma+F_*)^4\\-4!(\alpha_3-\gamma+F_*)\\\cdot\mu_*/2+4!\mu_*^2/2\end{matrix} & \begin{matrix}(-\alpha_4+F_*)^4\\-4!(-\alpha_4+F_*)\\\cdot\mu_*/2+4!\mu_*^2/2\end{matrix} & \begin{matrix}(-\alpha_5-\gamma+F_*)^4\\-3!(-\alpha_5-\gamma+F_*)\\\cdot\mu_*+4!\mu_*^2/2\end{matrix} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$F_* = F_x+\gamma F_y, (F_x = m\cdot\Delta t/\Delta x, F_y = n\cdot\Delta t/\Delta y), \mu_* = \mu_x+\gamma^2\mu_y, (\mu_x = \varepsilon\cdot\Delta t/\Delta x^2, \mu_y = \varepsilon\cdot\Delta t/\Delta y^2)$$

$$M = \begin{cases} 1: \{(x+y-s_0)/t \le 1/2\} \\ 0: \{(x+y-s_0)/t > 1/2\} \end{cases} \quad (9)$$

格子間隔を $\Delta x = h, \Delta y = \gamma h, \Delta t = k = Rh^2$とし、原点のごく近くを考えて、x，y，t を離散化して $x=\alpha h$、$y=\gamma\beta h$、$t=qRh^2$と表す。ここに、α, βは 0, ±0.5～±1.5 のような大きくない実数、q は 0, ±1・・・ の整数である。バーガーズ方程式の厳密解の一つの式(9)で表される衝撃波を用いて精度検証を行うことは前述のとおりである。図１の近接点５個を用い、この５個５種類の重みを定めるにあたり、未知点◉を原点としたときの５個の重みW_1～W_5が位置する格子点の座標値(x,y)をそれぞれ$(-\alpha_1 h, \gamma\beta_1 h)$, $(\alpha_2 h, 0)$, $(\alpha_3 h, -\gamma h)$, $(-\alpha_4 h, 0)$, $(-\alpha_5 h, -\gamma h)$というように式(9)の厳密解がその時間に到達する場所に一致させる。ここで重みWを定めるため式(6)において、r＝0,1,2,3,4とおいて得られるMの値を重み付差分式(7)に代入すれば連立方程式(8)が得られ、これを解けば重みW_1～W_5の値が定まる。図２にこの厳密解と比較した重み付差分解の結果の一部を示す。

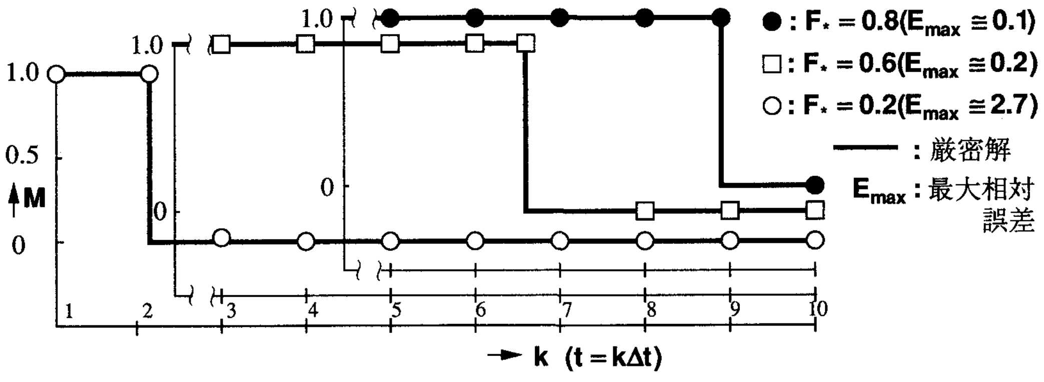

図2　非正方格子をもつ重み付差分解と厳密解

4．まとめ　非正方格子をもつ重み付差分法によるバーガーズ方程式の解の精度検証を行った。クーラン数を0.1から1.0まで変化させた場合に相対誤差が0.1～2.7%となり比較的精度良く解析することができた。実海域潮流解析適用を考えた場合、実海域の幾何学的境界条件に則した非正方メッシュでも、我々の提案する重み付差分法で精度よく解析できるものと考える。これからは、今回報告した陽的重み付差分法を実海域での潮流解析に応用していきたい。

参考文献　［１］空閑・加納・赤坂・寺本：多段階重み付差分法による潮流解析　平成４年度西部支部年講
［２］加納・赤坂・空閑：重み付差分法による潮流解析　第４６回年次学術講演会Ⅱ部