II－136　自由表面を含む流れの計算への有限解析法の応用

佐賀大学理工学部　正　大串 浩一郎

I. まえがき

自由表面を含む流れは自然界で数多く見られるが、水理学や海岸工学の分野においても非常に重要な役割をする。ダムの洪水調節や河川の氾濫によって引き起こされる一時的な流れや、海岸における高潮や津波は自由表面を含む流れである。水面から水底までの圧力分布として多くの場合採用されている静水圧分布の仮定は、実際の流れの数学モデルを与えるわけではない。自由表面を含む流れの解析では、水表面での移動境界を取り扱う必要もある。したがって、こういう自由表面を含む流れの研究においては、自由表面位置の正確な予測が非常に大事になってくる。

有限解析法（Finite Analytic Method;FA）は、偏微分方程式の解析解の重ね合わせによって得られる離散的な数値手法の一つである。 FA法によって、２次元や３次元の流れや熱輸送の正確なシミュレーションが行えることが既に示されている[1),2),3)]。本研究では、自由表面を含む流れに有限解析法を拡張応用することを目的としている。

II. 基礎式

非圧縮性流体の運動は、連続の式と Navier-Stokesの方程式よって規定される。２次元乱流に対しては、これらの方程式は以下のように表される。

$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial U}{\partial y}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=-g-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_t\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_t\frac{\partial V}{\partial y}\right) \tag{3}$$

ここで、U, V は流速成分、P は圧力、g は重力加速度、ϱ は密度、ν_t は渦動粘性係数である。

式(1)から(3)を解くためには固定壁のみならず自由表面での境界条件が必要である。もし、自由表面が式 $y=h(x,t)$ によって表されるとすれば、自由表面における運動学的条件は以下のように表される。

$$V_s=\frac{\partial h}{\partial t}+U_s\frac{\partial h}{\partial x}\qquad \text{at}\ \ y=h(x,t) \tag{4}$$

ここに、U_S, V_S は自由表面における流速成分である。

III. 数値解析のアプローチ

本研究では、通常のデカルト座標系を採用し、速度場と圧力場を求めることにした。自由表面の形は式(5)より求め、自由表面における速度成分は以下のように計算した。速度成分 U_S, V_S は一般に計算格子点上では定義できないので（図－１）、これらの値はその表面位置付近の格子点における流速成分の値より外挿により求めることになる。しかしながら、もし、U_S, V_Sの両方の値を外挿により求めることにすれば、正確な計算結果は望めないので、本研究では次のような水深方向に積分された連続の式をさらに追加して用いることにした。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{U}h\right)=0 \tag{5}$$

ここで、

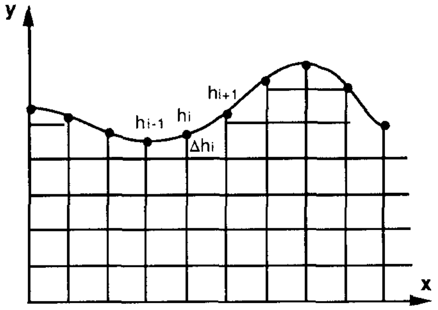

Fig.1　Cartesian coordinate and treatment of the free surface

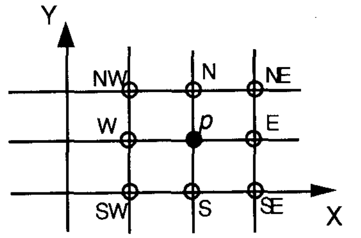

Fig.2　2–D computational grid

$$\overline{U} = \frac{1}{h}\int_0^h U \; dy \tag{6}$$

本研究では、式(6)の$\overline{U}$を求めるために、U_Sだけを 直線外挿により算出することにした。$\overline{U}$が得られた後、式(5)により次の時間ステップにおける自由表面の高さｈが数値的に求められる。V_Sの値は、以上より式(4)を用いて陽的に得られる。

運動量方程式(2)、(3)を解くために、ここでは次の２次元の輸送方程式を考える。

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = R\ (\phi_t + U\phi_x + V\phi_y) \ + f \tag{7}$$

ここでϕは、流速U, V 等の従属変数、R はレイノルズ数等の対応するパラメーター、 f はソース項である。有限解析法による定式化では、格子点p における ϕ の値を求める代数方程式は、以下のようになる。

$$\phi_p = \frac{1}{1 + \dfrac{R}{\Delta t} C_p} \left(\sum_{n=1}^{8} C_{nb}\phi_{nb} + \frac{R}{\Delta t} C_p \phi_p^{n-1} - C_p f_p \right) \tag{8}$$

ここで、 ϕ_{nb}は格子点p の周りの８つの格子点における従属変数の値である。 C_{nb}とC_pは 有限解析法の係数である（図－２）。

IV. 考察と結論

運動量方程式に対する式(８)の有限解析法の解は、通常最初は連続の式(1)を満足しない。従って連続の式を差分化した式に式(8)を代入することにより、圧力に対する方程式を導き、その式の残差の収束計算をすることになる。ダムの余水吐における跳水や港湾における高潮等の実際の流れの幾つかの計算例を講演時に発表する予定である。本研究により、自由表面を有する２次元流れの予測を有限解析法により行えることが確かめられた。今後、この結果を踏まえて３次元問題への拡張に取り組みたい。

参考文献

1.　Chen, C.J. and Chen, H.C.(1984), "Finite Analytic Numerical Method for Two Dimensional Navier-Stokes Equations", Journal of Computational Physics, Vol. 53, pp.209-226.

2.　Chen, C.J.(1987), "Finite Analytic Method", Chapter 17 *in* Handbook of Numerical Heat Transfer, Eds. Minkowycz, W.J., Sparrow, E.M., Pletcher, R.H. and Schneider, G.E., John Wiley and Sons, pp.723-746.

3.　Chen, C.J. and Bravo, R.H.(1991), "Heat Transfer Study of Staggered Thin Rectangular Blocks in a Channel Flow", ASME Transaction, Journal of Electronic Packaging, Vol.113.