II－135　非圧縮性粘性流体の有限要素解析における圧力境界条件に関する一考察

中央大学　正員　安重　晃
日本大学　正員　畑中　勝守
中央大学　正員　川原　睦人

1　はじめに

非圧縮性粘性流体の数値解析を行う際の最大の問題点は、非圧縮の連続条件をいかに考慮するかということにある。有限要素法による非圧縮性粘性流体の解析手法としては、運動方程式と連続方程式を直接連立させて解く方法や、Penalty 関数法を用いて圧力を消去して計算を行う手法など、多くの計算方法が提案されてきた。近年では差分法の MAC 法や SMAC 法の手法を取り入れた、いわゆるフラクショナル・ステップ法に基礎を置く計算方法が大多数を占めているようである。これらの方法は、直接非圧縮性の連続式を解かず、運動方程式に連続式を適用し、圧力（あるいは、ポテンシャル関数）のポアソン方程式を導出し、この方程式を解くことにより間接的に非圧縮性の連続条件を満足させるものである。

ここでは、この圧力ポアソン方程式の境界条件の取扱について、流速修正法 [1][2] を基に考察を行う。

2　基礎方程式

添字記法を用いてナビエ・ストークスの運動方程式と連続の方程式を書き表すと以下のようになる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j u_{i,j} - \nu(u_{i,j} + u_{j,i})_{,j} + \frac{1}{\rho}p_{,i} = f_i \qquad (1)$$

$$u_{i,i} = 0 \qquad (2)$$

ここで、u_i は流速成分を示し、f_i は物体力, p は圧力を示す。又、ν は動粘性係数を ρ は密度を示す。

式 (1),(2) において、圧力と連続の方程式を陰的に表現し、以下のように時間方向に離散化する。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n - \nu(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} + \frac{1}{\rho}p_{,i}^{n+1} = f_i \qquad (3)$$

$$u_{i,i}^{n+1} = 0 \qquad (4)$$

式 (3),(4) を逐次時間積分により、各時刻の流速と圧力を求めることにより計算を進める。

3　流速修正法

式 (3),(4) に流速修正法を適用する。

始めに、式 (3) において圧力を除き中間的な流速 $\tilde{u}$ を定義する。

$$\frac{\tilde{u}_i - u_i^n}{\Delta t} + u_j^n u_{i,j}^n - \nu(u_{i,j}^n + u_{j,i}^n)_{,j} = f_i \qquad (5)$$

式 (3) から式 (5) の辺々を減ずれば、次の関係式が得られる。

$$\frac{u_i^{n+1} - \tilde{u}_i}{\Delta t} + \frac{1}{\rho}p_{,i}^{n+1} = 0$$

$$u_i^{n+1} = \tilde{u}_i - \Delta t\frac{1}{\rho}p_{,i}^{n+1} \qquad (6)$$

式 (6) の発散を取り、連続方程式 (3) を適用すれば、以下の圧力ポアソン方程式が得られる。

$$p_{,ii}^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t}\tilde{u}_{i,i} \qquad (7)$$

最終的に、流速修正法の計算アルゴリズムは以下のようになる。

1. 式 (5) より、中間流速 $\tilde{u}$ を求める。
2. 式 (7) より、p^{n+1} を求める。
3. 式 (6) を用いて、u^{n+1} を求める。
4. $n \leftarrow n+1$ として、1 へ戻る。

4　圧力ポアソン方程式の圧力境界条件

式 (5)(6)(7) に重み付き残差法を適用し、ガラーキン法の手順で定式化を行えば流速修正法に必要な有限要素方程式が得られるが、本稿の目的は式 (7) の圧力境界条件についての検討であるので、以降では式 (7) の定式化についてのみ説明を行う。

式 (7) に重み関数 p^* を乗じて、解析領域で積分すれば次式を得る。

$$\int p^* p_{,ii}^{n+1} d\Omega = \frac{\rho}{\Delta t}\int p^* \tilde{u}_{i,i} d\Omega \qquad (8)$$

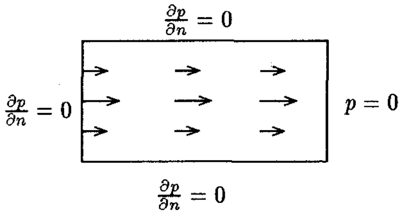
左辺第１項に部分積分を施しガウスの発散定理を適用すれば、次式の様な弱形式の方程式に変形することが出来る。

$$\int (p^* p_{,i}^{n+1})_{,i} d\Omega - \int p_{,i}^* p_{,i}^{n+1} d\Omega = \frac{\rho}{\Delta t}\int p^* \tilde{u}_{i,i} d\Omega$$

$$\int p_{,i}^* p_{,i}^{n+1} d\Omega = -\frac{\rho}{\Delta t}\int p^* \tilde{u}_{i,i} d\Omega + \int p^* p_{,i}^{n+1} n_i d\Gamma$$

$$= -\frac{\rho}{\Delta t}\int p^* \tilde{u}_{i,i} d\Omega + \int p^* \frac{\partial p^{n+1}}{\partial n} d\Gamma \quad (9)$$

ここで Γ は解析領域の境界を示し、n_i は境界上に立てた外向き法線ベクトルの方向余弦を示す。式(9)の右辺第２項は、いわゆる自然境界条件と呼ばれるものであり、境界上における圧力の法線方向微分を含んでいる。しかしながら、多くの有限要素解析ではこの項をゼロとして計算が行われているのが現状である。この時、図－１に示すように圧力の規定されていない境界上では、$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ という境界条件が、人為的に導入されることになる。



図－１　圧力境界条件

5　圧力ポアソン方程式の流速境界条件

この不合理な条件を無くすために、川原ら [3] は運動方程式に方向余弦を乗じた式を用いて、式 (9) から $p_{,i}$ を消去する手法を提案しているが、ここでは、より簡便な方法で上の問題を克服する方法を述べる。

式 (9) に式 (6) を代入して、$p_{,i}$ を消去する。

$$\int p_{,i}^* p_{,i}^{n+1} d\Omega = -\frac{\rho}{\Delta t}\int p^* \tilde{u}_{i,i} d\Omega$$

$$+ \frac{\rho}{\Delta t}\int p^* (\tilde{u}_i - u_i^{n+1}) n_i d\Gamma \qquad (10)$$

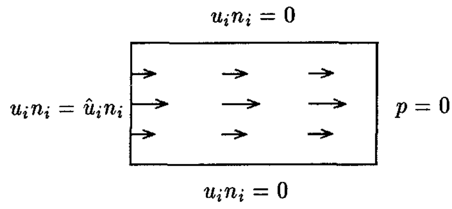
右辺第１項に部分積分を施し、ガウスの発散定理を適用すれば、次式のように変形することが出来る。

$$\int p_{,i}^* p_{,i}^{n+1} d\Omega = -\frac{\rho}{\Delta t}\int p^* \tilde{u}_i n_i d\Gamma + \frac{\rho}{\Delta t}\int p_{,i}^* \tilde{u}_i d\Omega$$

$$+ \frac{\rho}{\Delta t}\int p^* \tilde{u}_i n_i d\Gamma - \frac{\rho}{\Delta t}\int p^* u_i^{n+1} n_i d\Gamma$$

$$= \frac{\rho}{\Delta t}\int p_{,i}^* \tilde{u}_i d\Omega - \frac{\rho}{\Delta t}\int p^* u_i^{n+1} n_i d\Gamma \quad (11)$$

上式において、右辺第２項は圧力でなく流速で表現されていることに注意されたい。この項は、境界からの流入出を積分することにより容易に計算することが出来る（境界からの流入出が無い場合にはゼロとなる）。



図－２　流速境界条件

上図において、$\hat{u}_i$ は流速境界条件をあらわす。

6　おわりに

本稿で示した圧力ポアソン方程式を用いれば、境界上における圧力勾配の境界条件を流速の境界条件に変更することが可能である。さらに、境界上で人為的に導入されていた $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ という境界条件を回避することが出来、合理的な計算を行うことが出来る。

なお本稿では、圧力ポアソン方程式についてのみ説明を行ったが、ポテンシャル関数のポアソン方程式についても同様の変形を行うことが可能である。

参考文献

[1] M.Shimura and M.Kawahara : “Two Dimensional Finite Element Flow Analysis Using the Velocity Correction Method”, Proc. of JSCE No.398/I-10

[ ] 畑中　勝守，川原　睦人：“流速修正法による熱流体有限要素解析” 土木学会第 43 回年次学術講演会講演概要集　第２部, pp504–505

[3] 林　正宏，川原　睦人：“分離型法を用いた非圧縮粘性流れの有限要素解析” 土木学会第 44 回年次学術講演会講演概要集　第２部, pp604–605