II－134　確率有限要素法による非定常地下水流れ解析

中央大学　学生員　本間　史祥
中央大学　正会員　樫山　和男

1. はじめに

近年、地下水の流れ解析において数値解析法が盛んに行われるようになっているが、これら多くの方法は、確定的な入力データにより解析を行うものである。しかし、一般に、入力データを確定的に決定づけることは難しく、また、入力データの不確定性に起因する変動量を知ることは工学上重要なことである。そこで、本報告は地下水流れ解析において、透水係数の不確定変動を考慮した解析を、一次摂動法に基づく確率有限要素法により行うことを検討するものである。

2. 基礎方程式

非定常地下水流れの基礎方程式は (1) 式で表される。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+k_x\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+Q=0 \tag{1}$$

ここに、ϕはピエゾ水頭、K_x, K_yは透水係数、Q は湧水率 である。境界条件は次のようになる。

$$\phi=\hat{\phi} \qquad on \quad S_1 \tag{2}$$

$$K_x\frac{\partial \phi}{\partial x}l_x+K_y\frac{\partial \phi}{\partial y}l_y=\hat{q} \qquad on \quad S_2 \tag{3}$$

ここに、 $\hat{}$ は既知量を表し、S_1, S_2は境界を表す。

3. 有限要素方程式

三節点三角形一次要素を用いて空間の離散化を行い、また時間方向の離散化には準陽的オイラー法を用いる。これにより得られる有限要素方程式は (4) 式で表される。

$$\{\phi\}^{n+1}=[M]^{-1}\left([M]\{\phi\}^n-\Delta t\,[K]\{\phi\}^n+\{F\}\right) \tag{4}$$

ここに、$[K]$ は剛性マトリックス、$\{F\}$ は荷重ベクトル、$[M]$ は質量マトリックスである。

4. 確率有限要素法の適用

本報告では透水係数に確率変数が入力される場合を考え、１次摂動法を用いて解くものとする。透水係数を次のような確率過程を含む式で表す。

$$K_x=\overline{K}_x\{1+\alpha(x_k, y_k)\}=\overline{K}_x(1+\alpha_k) \tag{5}$$

$$K_y=\overline{K}_y\{1+\alpha(x_k, y_k)\}=\overline{K}_y(1+\alpha_k) \tag{6}$$

ここに、$\overline{K}_x, \overline{K}_y$は K_x, K_yの期待値、α_kは期待値０の確率変数である。これを剛性マトリックスに代入することにより得られる全体剛性マトリックスは、(7) 式のような微小変動量を持つマトリックスになる。また、未知ポテンシャル量については (8) 式を仮定する。

$$[K]=\left[K^0\right]+\sum_{k=1}^{n}\left[K_k^I\right]\alpha_k \tag{7}$$

$$\{\phi\}=\left\{\phi^0\right\}+\sum_{k=1}^{n}\left\{\phi_k^I\right\}\alpha_k \tag{8}$$

(7), (8) 式を (4) 式に代入し、１次摂動法によって得られる式は (9) ,(10) 式で表される。

$$\left\{\phi^0\right\}=[M]^{-1}\left([M]\left\{\phi^0\right\}^n-\Delta t\left(\left[K^0\right]\left\{\phi^0\right\}^n+\{F\}\right)\right) \tag{9}$$

$$\left\{\phi_k^I\right\}=[M]^{-1}\left([M]\left\{\phi^I\right\}^n-\Delta t\left(\left[K_k^I\right]\left\{\phi^0\right\}^n+\left[K^0\right]\left\{\phi_k^I\right\}^n\right)\right) \tag{10}$$

統計量の評価として、ポテンシャルの値の期待値と分散値を評価する。期待値、分散は次の式で表される。

$$E[\{\phi\}]=\left\{\phi^0\right\} \tag{11}$$

$$var\left[\{\phi\}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\{\phi_i^I\right\}\left\{\phi_j^I\right\}E\left[\alpha_i\alpha_j\right] \tag{12}$$

ここに、$E[\alpha_i\alpha_j]$ は、α_i,α_j の共分散である。

5. 数値解析例

本報告の解析例として、簡単な図１の問題について解析を行うものとする。透水係数の期待値は $K_x^0 = K_y^0 = 1 \times 10^{-2}\,(m/s)$ とする。また入力確率変数としてはα_kに確定的な値を与えるものとする。

図２は1000秒後における節点５でのポテンシャル値の確定解と確率有限要素解の比較を表す。これにより、α_kが０に近いほど両者が近い値を示し、１次変動率ϕ_i^Iが比較的正確に求められていることが分かる。また、図３は $var[\alpha_k] = 0.01$ で、完全相関とした時の図１の各点におけるポテンシャル値の期待値と3σ限界を表したものである。これにより、中心に向かうに従って変動が大きくなっており、入力データの変動の影響が考慮された解析が行われていることがわかる。

6. おわりに

本報告において、１次摂動法に基づく確率有限要素法の有効性の検討を、非定常地下水流れの問題において行うことができた。本手法により、不確定性に起因する変動量を、繰り返し計算を行うことなく求めることが可能である。今後は実際問題への適用を行う予定である。

参考文献

1) 中桐滋・久田俊明　確率有限要素法入門、培風館

2) Alfredo H-S.Ang・Wilson H Tang　伊藤學　亀田弘行訳　土木・建築のための確率・統計の基礎、丸善

3) Larry J.Segerlind　川井忠彦監訳　応用有限要素解析、丸善

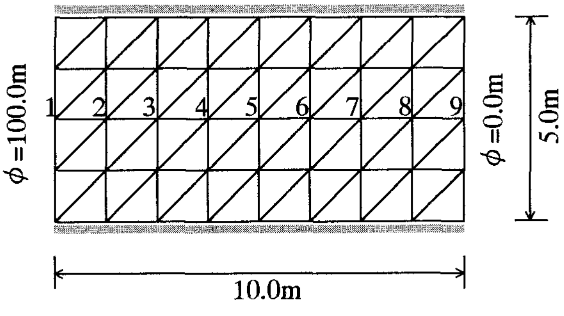

図１解析例

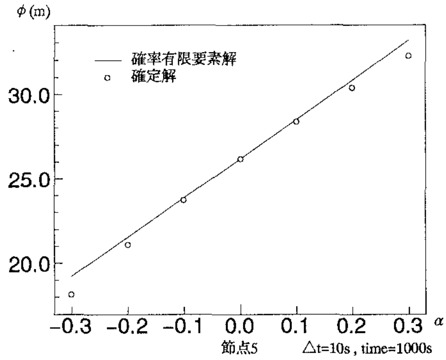

図２確定解と確率有限要素解の比較

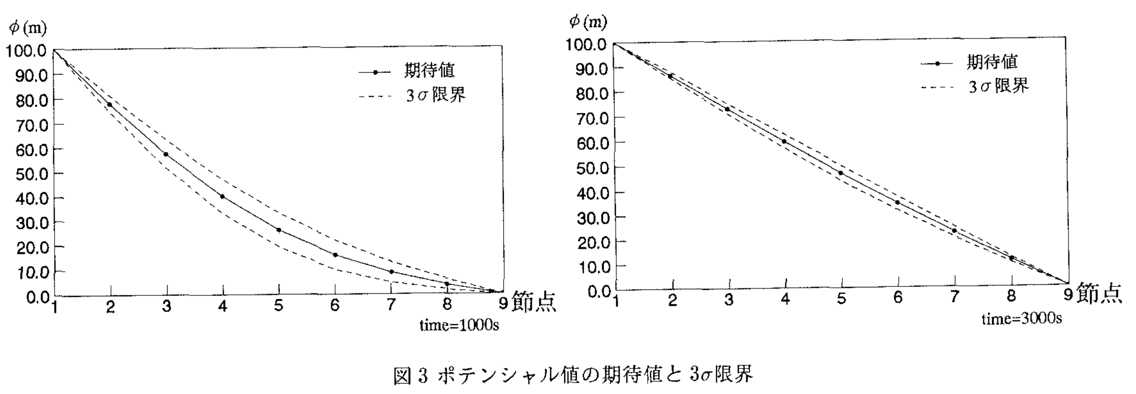

図３ポテンシャル値の期待値と3σ限界