土木学会第48回年次学術講演会（平成５年９月）

II－132　　有限要素法による管網計算における線形化

九州産業大学　正　員　加納正道
福岡大学　正　員　黒木健実
九州産業大学　正　員　赤坂順三

1.　まえがき　有限要素法を用いて管網計算を行うためには、各管内の摩擦損失水頭および流量を各節点における値に置き換える必要があり、また非線形な流量式をいかに線形化するかによって解析手法、結果の精度および収束性が決まります。線形化に工夫を行った有限要素法を管網計算に用いることにより、プログラムの汎用性、初期仮定流量入力データの簡略化および解析解の精度と収束性に良い結果が得られましたので、ここに報告します。

2.　理論と計算手法

2.1　基礎方程式　管網計算の基礎式として以下に示す４方程式が用いられます。

流量式：　$h = rQ^m$　(1)　（h は摩擦損失水頭、Q は流量、r は抵抗係数、m は指数）

節点方程式：　$\sum_{j=1}^{s} Q_{ij} = Q_{i\ out}$　(2)　（Q_{ij} は任意の節点 i に流入する j 番目の管の 流量、s は節点 i に流入する管の数、$Q_{i\ out}$ は節点 i における流出量）

閉管路方程式：　$\sum h = 0$　(3)　（各閉管路における摩擦損失水頭の和はゼロ）

流出入平衡式：　$\sum_{i=1}^{p} Q_{i\ out} = 0$　(4)　（管網全体に流入する量と流出する量は平衡する。）

2.2　有限要素法による定式化

2.2.1　節点値への置き換え　この問題を有限要素法で解くためには、例えば図１に示すように管網を４個の節点と４個の要素(管)とに分解して考えます。

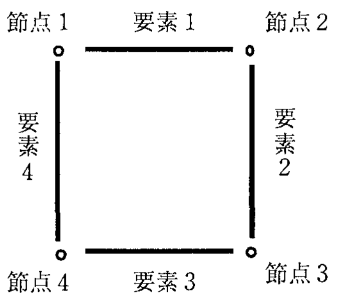

図１　節点及び要素番号づけ

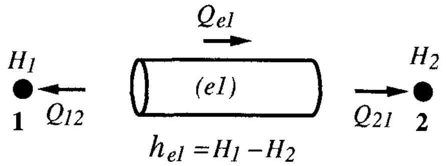

図２　要素から節点への置き換え

次に図２に示すように第１の要素の両端の節点　1、2　における水頭を H_1，H_2　、流出量を Q_{12}，Q_{21} とおき、要素についての摩擦損失水頭 h_{e1} と流量 Q_{e1} を次式のように節点の水頭 H_1，H_2 と流量 Q_{12}，Q_{21} で置き換えます。

$$h_{e1} = H_1 - H_2\ ,\quad Q_{e1} = -Q_{12} = Q_{21} \tag{5}$$

2.2.2　線形化　流量式(1)について、式(5)を代入し、次のように線形化します[1]。

$$h_{e1} = H_1 - H_2 = r_{e1} \bullet Q_{e1}[Q_{e1}^{m-1}] = r_{e1} \bullet Q_{e1}[\hat{Q}_{e1}^{(m-1)\gamma} \bullet \hat{\hat{Q}}_{e1}^{(m-1)(1-\gamma)}] \tag{6}$$

即ち Q の(m−1)乗の部分を[ ] 内の既知項で置き換え、最右辺の3番目と4番目の項はそれぞれ１要素における繰り返し計算の１回前と２回前の既知流量を意味し、γ はそれらを取り込む割合を示しています。次に水頭 (H_1，H_2)を使って管の両端の流量(Q_{12}，Q_{21})を次式のように表示します。

$$Q_{12} = \frac{1}{\left[r_{e1} \bullet \hat{Q}_{e1}^{(m-1)\gamma} \bullet \hat{\hat{Q}}_{e1}^{(m-1)(1-\gamma)} \right]}(H_2 - H_1)\ ,\quad Q_{21} = \frac{1}{\left[r_{e1} \bullet \hat{Q}_{e1}^{(m-1)\gamma} \bullet \hat{\hat{Q}}_{e1}^{(m-1)(1-\gamma)} \right]}(H_1 - H_2) \tag{7}$$

2.2.3 要素剛性マトリックス 任意の l 要素において、両端の節点 i,j の流量と水頭の関係は式(8)で表されます。

$$\begin{bmatrix} Q_{ij} \\ Q_{ji} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{el} & k_{el} \\ k_{el} & -k_{el} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_i \\ H_j \end{bmatrix} \quad (8) \quad , \qquad k_{el} = 1 \Big/ \left[r_{el} \bullet \hat{Q}_{el}^{(m-1)\gamma} \bullet \hat{\hat{Q}}_{el}^{(m-1)(1-\gamma)} \right] \quad (9)$$

ここに式(8)の右辺第一項はこの問題に対応する要素剛性マトリックスを表します。また、k_{el} は、l 要素の既知項を意味し、式(9)で示されます。以上のように要素剛性マトリックスが得られたので、あとは通常の有限要素法と同様の手順[2]にしたがって、流出入平衡式(4)を満足するように全体剛性マトリックスを組立てれば、有限要素法による管網計算ができることになります。

2.3 γ 値について 繰り返し計算の１回前と２回前の既知流量を取り込む割合 γ を妥当に定めるために数値実験を行った結果を図３および４に示します。例えば、γ = 1 即ち １回前の値のみを用いる場合には、Hazen -Williams 式においては8~32回の繰り返しで収束するが Manning式においては解が振動します。γ = 0.8 を用いれば、Hazen -Williams 、Manning両式 共に１０未満の繰り返し回数で相対誤差 ε が0.1~5%の範囲の解を求めることができます。

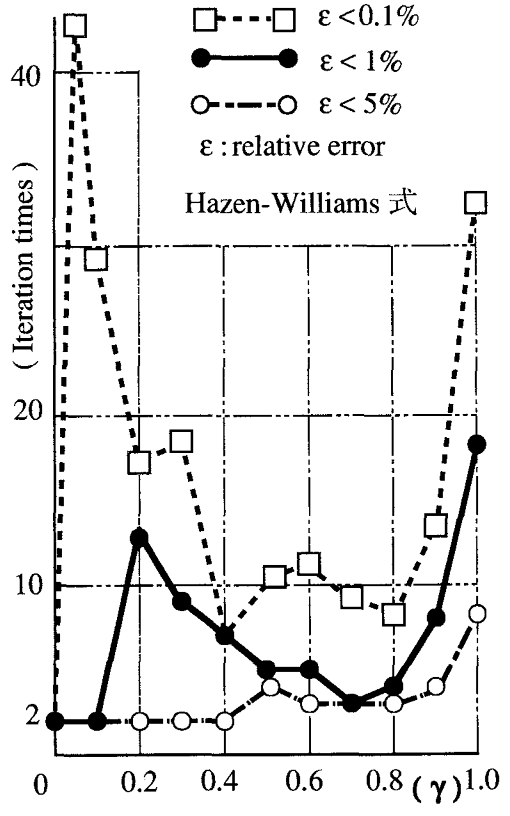

図３ γ 値と繰り返し回数(Hazen -Williams式)

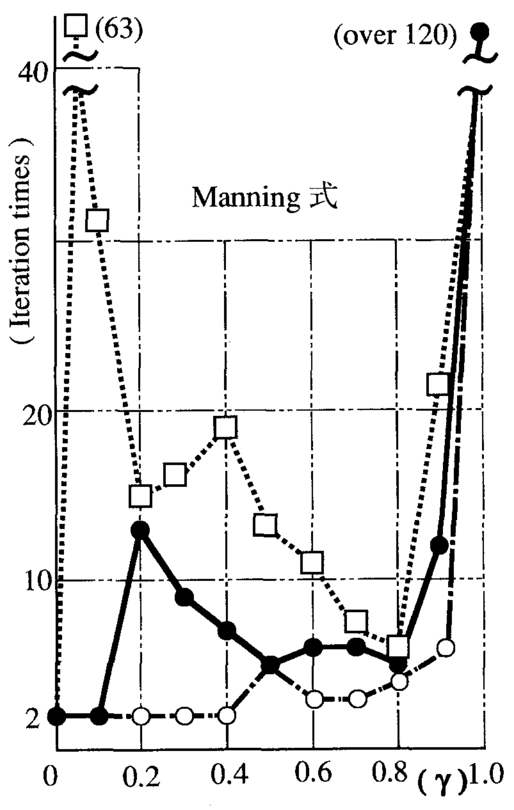

図４ γ 値と繰り返し回数 (Manning式)

3. まとめ 線形化に工夫を行った有限要素法を管網計算に用いることにより、プログラムの汎用性および解析解の精度と収束性に良い結果が得られました。他の管網計算法において繰り返し回数を少なくして妥当な流量を得るためには第１次仮定流量を定める際にかなりの労力を必要としますが、本法ではすべての仮定流量を1.0とすることができ仮定流量データ作成を簡略化できます。線形化における1, 2回前の既知流量を取り込む割合 γ の値は0.8程度が妥当と思われます。

参考文献 [1]加納正道、黒木健実：土木解析学演習, pp.1~29、理工図書、1993年
[2]C.A.Brebbia, A.J.Ferrante : Computational Hydraulics(磯部訳),pp.99~103,サイエンス社,1988年