II-117　確率最適制御理論によるダムの制御

中央大学　学生員　佐々木　建一
中央大学　正員　川原　睦人

1. はじめに

工学における問題の多くは不確定要素を大なり小なり含んでいる。本論では確率最適制御理論を導入することによって、洪水時のダム水門から放流する流量を決定する。計算手法は最適制御理論の一つである Dynamic Programming を用いる。数値解析例では、貯水池内部の水位変動を抑えることを目的とする。洪水の流入量、水位変動量に外乱が含まれているものとして矩形水路をモデルに用い洪水制御を行う。

2. 有限要素方程式

洪水時の流体の挙動を表す方程式として、浅水長波方程式を用いる。

$$\dot{q}_i + g\,h\,\zeta_{,i} = 0 \tag{1}$$

$$\dot{\zeta} + q_{i,i} = 0 \tag{2}$$

基礎方程式について、有限要素法による空間方向の離散化を行う。通常のガレルキン法に従って、重み付き残差方程式の誘導を行い、三角形一次要素を用いて離散化を行えば、以下のような有限要素方程式が得られる。

$$\{\dot{x}\} = [\bar{M}]^{-1}[H]\{x\} \tag{3}$$

この有限要素方程式は、次のように分割できる。

$$\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\} + [C]\{f\} + \{w\} \tag{4}$$

ここに，状態量：$\{x\}^T = \{q_x \quad q_y \quad \zeta\}^T$,
操作量：$\{u\}$，外力項：$\{f\}$

ここで、{ } はベクトルを、[ ] はマトリックスを表す。時間方向の離散化としては、二段階陽解法を用いて逐次時間毎に流量及び水位変動量を求める。

3. 最適制御

本手法では、全時間にわたる洪水の流入量が既知であるものとして解析を進める。評価関数は水位変動量の二乗和と、操作量の二乗和の項より成り立っている。

$$J(u) = \int_{t_0}^{t_f} \left[\{x\}^T[Q]\{x\} + \{u\}^T[R]\{u\}\right] dt \tag{5}$$

ここに、$[R]$,$[Q]$ は、制御ベクトル $\{u\}$ と状態ベクトル $\{x\}$ に対する重み係数行列であり、制御解析では、評価関数 $J(u)$ を最小にするような制御ベクトル $\{u\}$ を求める。

外乱としては白色雑音を用いる。その平均、共分散は、

$$E\{w(t)\} = 0 \tag{6}$$

$$E\{w(t)w(\tau)^T\} = [W]\delta(t-\tau) \tag{7}$$

であるとする。次に Dynamic Programming を用いるにあたりスカラ関数を導入する。

$$V(x,t) = \min_u \int_t^{t_f} \left[\{x\}^T[Q]\{x\} + \{u\}^T[R]\{u\}\right] d\tau$$

最適性の原理を用いて整理すると、Dynamic Programming による最適条件式である Bellman-Hamilton-Jacobi の式が導かれる。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial t} &= \min_u \left[\{x\}^T[Q]\{x\} + \{u\}[R]\{u\}\right. \\ &+ ([A]\{x\} + [B]\{u\} + [C]\{f\})^T \frac{\partial V}{\partial\{x\}} \\ &+ \left.\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2[W]}{\partial\{x\}^2}\right] V\right] \end{aligned} \tag{8}$$

（8）式の［　］内を最小にするような $\{u\}$ は

$$\{u\}^{opt} = -\frac{1}{2}[R]^{-1}[B]^T\frac{\partial V}{\partial\{x\}} \tag{9}$$

で与えられる。（8）式は $V(x,t)$ に関する偏微分方程式であるから、これを解いて $V(x,t)$ を求めれば、（9）式により $\{u\}$ が求まる。ここで、

$$V(x,t) = k + 2\{p\}^T\{x\} + \{x\}^T[P]\{x\} \tag{10}$$

と仮定すると、次のリカッチ型微分方程式が導かれる。

$$-[\dot{P}] = [P][A] + [A]^T[P] - [P][B][R]^{-1}[B]^T[P] + [Q] \tag{11}$$

$$-\{\dot{p}\} = [A]^T\{p\} + [P][C]\{f(t)\} - [P][B][R]^{-1}[B]^T\{p\} \tag{12}$$

上式の境界条件は、

$$[P(t_f)] = [0],\ \{p(t_f)\} = \{0\}$$

で与えられる。
（11）、（12）式を上式の境界条件のもとに逆時間で解けば、最適操作量 $\{u\}^{opt}$ が次式で決定される。

$$\{u\}^{opt} = -[R]^{-1}[B]^T(\{p\} + [P]\{x\}) \tag{13}$$

4. 平均値と共分散

状態量の平均値は(4)式を平均することにより次式で与えられる。

$$\{\dot{m}\} = [A]\{m\} + [B]\{u\} + [C]\{f\} \qquad (14)$$

また共分散は共分散方程式

$$\begin{aligned}[\dot{M}] &= \left([A] - [B][R]^{-1}[B]^T[P]\right)[M] \qquad (15)\\ &+ [M]\left([A] - [B][R]^{-1}[B]^T[P]\right)^T + [W]\end{aligned}$$

を解くことによりもとまる。なお平均値、共分散の初期値は既知であり、

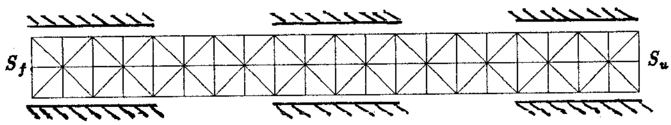
$$E\{x_0\} = \{m_0\} \qquad (16)$$

$$E\left\{(\{x_0\} - \{m_0\})(\{x_0\} - \{m_0\})^T\right\} = [M_0] \quad (17)$$

で与えられる。

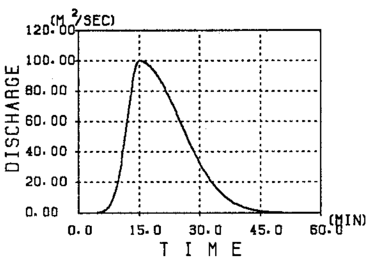
5. 数値解析例

数値解析例として図－１のような解析モデルを用い、領域の上流側 境界 S_fで図－２ (a) のような全洪水時間を１時間として流入条件をあたえ、領域の下流側 境界 S_uで洪水の制御を行う。

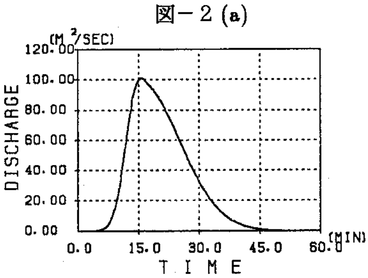


図－１. 有限要素分割図

全長：2 km
全幅：200 m



図－２ (a)



図－２ (b)

図－２ (b) は、計算された放流量を示している。図－３ (a),(b),(c) はそれぞれ、領域の上流側の境界、中流、下流側の境界での水位の時間的変化を示している。なお、中心線は平均値を、両側の線は３－σ線を示している。

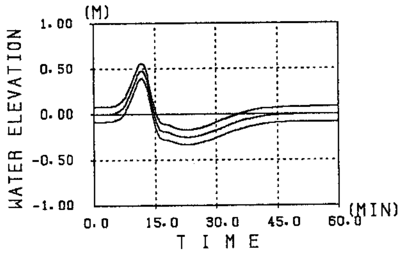
6. おわりに

本報では最適制御理論の一つである Dynamic Programming を用いて外乱を考慮した場合のダム放流量の決定をした。しかし、リカッチ方程式、共分散方程式を解く際に計算時間及び計算機容量を減らさないと大規模計算には適用できない。また、実際問題に近づけるためにいろいろな制約条件を考慮していきたい。

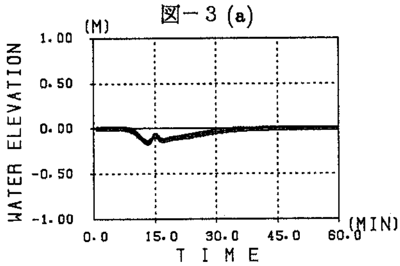
参考文献

1. 梅津，川原，"水理モデルを考慮したダム放流量の最適制御"，第45回土木学会年次講演会第II部門

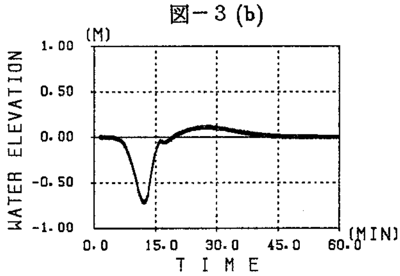
2. 添田, 中溝ら，"確率システム制御の基礎"，日新出版 (1975)



図－３ (a)



図－３ (b)



図－３ (c)