

II-63

タンクモデルを用いたカルマンフィルターによる流出解析法の定式化

九州大学工学部 学生員 ○渡辺直久

九州大学工学部 正 員 河村 明

九州大学工学部 正 員 神野健二

1. はじめに タンクモデルは流域をいくつかの貯留型の模型容器(俗にタンクという)の組み合わせに置き換えて考える流出解析法である¹⁾。最上段タンクからの流出は表面流出に、中段タンクからの流出は中間流出に、下段タンクからの流出は地下水流出にそれぞれ対応しているといわれている。従来より貯留関数法によるカルマンフィルターを用いた流出解析法については数多く研究されている²⁾が、タンクモデルを用いたカルマンフィルターによる流出解析法はほとんど見受けられないようである。著者らはカルマンフィルターによるタンクモデルを用いた流出解析法について、タンクモデルのタンク水深、側方流出孔の係数、下方浸透孔の係数を未知とし、側方流出孔の高さは既知として検討を行ってきた³⁾。本報ではさらに、側方流出孔の高さをも未知パラメータとして、拡張カルマンフィルターによる流出解析法の定式化を試みたものである。

2. タンクモデルの諸元 ここでは、図-1に示す4段タンクモデルを例にとり定式化を行う。各タンクについてタンク水深 $h_1 \sim h_4$ (mm)、側方流出孔の係数 $a_1 \sim a_5$ (1/hour)、下方浸透孔の係数 $b_1 \sim b_3$ (1/hour)、側方流出孔の高さ $c_1 \sim c_4$ (mm)の合計16個のパラメータをタンクモデルの未知パラメータとする。各パラメータの制約条件としては、非負であること、および各タンクにおける側方流出孔係数 a と下方浸透孔係数 b の和は1以下であることが挙げられる。次に、タンク側方からの流出高を $Q_1 \sim Q_5$ (mm/hour)、タンク下方からの浸透高を $I_1 \sim I_3$ (mm/hour)とすると

$$\begin{cases} Q_i(t) = a_i(h_i(t) - c_i)U(h_i(t) - c_i) & (i=1,2) \\ Q_i(t) = a_i(h_{i-1}(t) - c_i)U(h_{i-1}(t) - c_i) & (i=3,4) \quad \dots(1) \\ Q_i(t) = a_i(h_{i-1}(t) - c_i) & (i=5) \\ I_i(t) = b_i h_i(t) & (i=1 \sim 3) \quad \dots(2) \end{cases}$$

ここに、 U は単位階段関数($U(x)=1$, if $x>0$; $U(x)=0$, if $x<0$)である。

また総流出高 $Q(t)$ は次式で表される。

$$Q(t) = \sum_{i=1}^5 Q_i(t) + w(t) \quad \dots(3)$$

ここに、 w は観測雑音である。本研究では、 $U(x)$ の近似関数として次式で表される連続関数であるHeaviside関数 $U_\epsilon(x)$ を用いる⁴⁾。

$$U_\epsilon(x) = 1/\pi \times \{\tan^{-1}(x/\epsilon) + \pi/2\} \quad (0 < \epsilon < 1) \quad \dots(4)$$

今回Heaviside関数を導入することにより、流出孔の高さと水深との関係の場合分けが不要となり、タンクモデルを用いたカルマンフィルターによる流出解析法の定式化が非常に容易となった。次に各タンクの連続式は、 $r(t)$ を有効降雨高(mm/hour)とすると次式となる。

$$\begin{cases} \text{第1段タンク } dh_1/dt = r(t) - Q_1(t) - Q_2(t) - I_1(t) + u_1(t) \\ \text{第 } i \text{ 段タンク } dh_i/dt = I_{i-1}(t) - Q_{i+1}(t) - I_i(t) + u_i(t) \quad (i=2,3) \\ \text{第4段タンク } dh_4/dt = I_3(t) - Q_5(t) + u_4(t) \end{cases} \quad \dots(5)$$

ここに、 $u_i(t)$: システム雑音

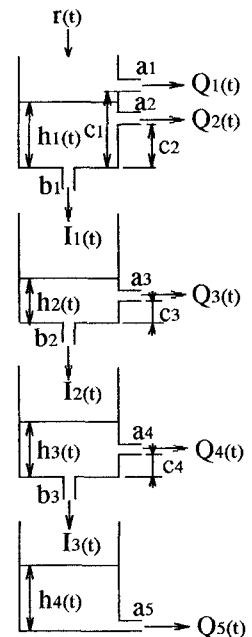


図-1 タンクモデルの諸元

3. カルマンフィルターによる定式化 カルマンフィルターは、式(6)に表されるようなシステムの状態量 X を推定するのに適用され、そのシステムの状態量は式(7)の観測方程式を通して観測される。

$$\text{システム方程式: } X(k+1) = \Phi(k)X(k) + \alpha(k) + u(k) \quad \dots(6)$$

$$\text{観測方程式: } Y(k) = H(k)X(k) + \beta(k) + w(k) \quad \dots(7)$$

ここに、 k : 時点 X : システム状態量ベクトル Φ : 既知の状態遷移マトリクス α : 既知の定数ベクトル H : 既知の変換行列 u : システム雑音 Y : 観測量ベクトル β : 既知の観測行列 w : 観測雑音である。式(6), (7)が定式化されれば、状態量 X の最適推定値 $\hat{X}$ はカルマンフィルターのアルゴリズムに従い逐次推定される⁵⁾。そこで、タンクモデルの16個の未知パラメータをカルマンフィルターで推定すべきシステム状態量とする。すなわち⁷⁾を転置記号とすると、

$$X = [x_1 \dots x_{16}]^T = [h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ b_1 \ b_2 \ b_3 \ c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4]^T \quad \dots(8)$$

また、システム方程式はシステム状態量の時間的変化であるから、 $F(X)$ を X のベクトル関数

$$F = [f_1 \dots f_{16}]^T \quad \dots(9) \text{ とすると、} X \text{ の遷移方程式は } dX/dt = F(X) \quad \dots(10) \text{、すなわち式(5)より}$$

$$\begin{cases} dx_1/dt = f_1(X) = r(t) - x_5(x_1 - x_{13})U(x_1 - x_{13}) - x_6(x_1 - x_{14})U(x_1 - x_{14}) \\ \quad - x_{10}x_1 + u_1(t) \\ dx_2/dt = f_2(X) = x_{10}x_1 - x_7(x_2 - x_{15})U(x_2 - x_{15}) - x_{11}x_2 + u_2(t) \\ dx_3/dt = f_3(X) = x_{11}x_2 - x_8(x_3 - x_{16})U(x_3 - x_{16}) - x_{12}x_3 + u_3(t) \\ dx_4/dt = f_4(X) = x_{12}x_3 - x_9x_4 + u_4(t) \\ dx_i/dt = f_i(X) = 0 + u_i(t) \quad (i=5, 6, \dots, 16) \end{cases} \quad \dots(11)$$

ここで、非線形ベクトル関数 $F(X)$ を X の近傍 X^* においてTaylor級数展開し、1次の項までとり線形化すると次式ようになる。 $F(X) = J(X^*)X + B(X^*) + u \quad \dots(12)$ ここで、 J : 関数 F の X に対するヤコビアン行列、 $B(X^*) = F(X^*) - J(X^*)X^*$ 、 $u = [u_1 \dots u_{16}]^T \quad \dots(13)$ 従って、式(10)は次式となる。

$$dX/dt = J(X^*)X + B(X^*) + u \quad \dots(14)$$

なおヤコビアン行列 J の要素には単位階段関数 $U(x)$ の微分としてのデルタ関数 $\delta(x) (=dU(x)/dx)$ が含まれるが、これには式(4)の $U_\varepsilon(x)$ の微分 $dU_\varepsilon(x)/dx = \delta_\varepsilon(x) = 1/\pi \times \{\varepsilon/(\varepsilon^2 + x^2)\} \quad \dots(15)$ を用いることとする。式(14)は線形微分方程式であるが、計算機での計算を容易にするために時間間隔 Δt で差分方程式に変換すると次式となりカルマンフィルターのシステム方程式が得られる。

$$X(k+1) = \Phi(X^*)X(k) + \Gamma(X^*)B(X^*) + \Gamma(X^*)u \quad \dots(16)$$

$$\text{ここで、} \Phi(X^*) = \exp(J\Delta t) = I + J\Delta t + \dots + (J\Delta t)^m/m! \dots \quad \dots(17)$$

$$\Gamma(X^*) = [\exp(J\Delta t) - I]J^{-1} = \Delta t [I + J\Delta t/2! + \dots + (J\Delta t)^{m-1}/m! + \dots] \quad \dots(18)$$

すなわち式(16)を式(6)と比較すると、 $\Phi(k) = \Phi(X^*)$ 、 $\alpha(k) = \Gamma(X^*)B(X^*)$ 、 $u(k) = \Gamma(X^*)u$ に対応することが分かる。なお、実際の計算では、式(17), (18)の4次項まで取り入れるようにしている。次に観測方程式については、式(3)の総流出高 Q を式(7)の観測量 Y にとる。そして式(3)の右辺を関数 $g(X)$ とおき、 $g(X)$ をTaylor展開し1次の項までとり線形化すると、式(7)の観測方程式の $H(k) = J_g(X^*)$ 、 $\beta(k) = g(X^*) - J_g(X^*)X^*(k)$ (ここに、 J_g は関数 g の X に対するヤコビアン行列)として、カルマンフィルターの観測方程式が定式化される。

4. むすび 本報では、タンクモデルを用いた拡張カルマンフィルターによる流出解析法の定式化を行った。今後は、模擬発生データを用いてシミュレーションを行いその精度を確認した後、実際の流出解析に応用していくつもりである。

【参考文献】 1) 菅原正巳：流出解析法，共立出版，1972。 2) 例えば、星清：洪水予測システムの基礎的検討(2)，土木試験所月報，No. 386，pp. 48-68，1985. 7。 3) 安永武英・神野健二・河村明：宅地開発にともなう農業用溜池への流入量の変化について，水工学論文集第36巻，pp. 629-634，1992. 2。 4) 寺沢寛一編：自然科学者のための数学概論応用編，pp. 66-69，1977. 2。 5) 河村明・神野健二・上田年比古・土井敬介：上水道配水管網系の節点需要量のオンライン予測に関する研究，土木学会論文集，No. 405号/II-11，pp. 245-254，1989. 5。