

貯留型流出モデルの確率応答特性

北海道大学大学院 学生員 篠原 伸和
 日本国土開発(株) 正 員 工藤 睦信
 北海道大学 正 員 藤田 睦博

1. はじめに

降雨流出系において、入力である降雨量が不規則過程であるならば、出力である流出量も不規則過程となる。著者らは、降雨量の確率特性が既知のときに、貯留型流出モデルにおける流出量の1~4次モーメントを理論的に誘導し、その確率分布を知るための手法を提案している¹⁾。本論文では、降雨量の確率過程における本理論の特性について考える。

2. 基礎理論

一般的な貯留型流出モデルは、次式で表される。

$$\frac{dS}{dt} = r - q \quad (2.1) \quad S = Kq^p \quad (2.2) \quad S: \text{貯留量(mm)}, q: \text{流出量(mm/hr)}, r: \text{降雨強度(mm/hr)}$$

降雨量 $r(t)$ が不規則関数ならば、 q, S もまた不規則関数となる。

r, S, q を平均値と平均値からの偏差で表す。

$$r(t) = \bar{r}(t) + \tilde{r}(t), S(t) = \bar{S}(t) + \tilde{S}(t), q(t) = \bar{q}(t) + \tilde{q}(t) \quad E\{\tilde{r}(t)\} = 0, E\{\tilde{S}(t)\} = 0, E\{\tilde{q}(t)\} = 0 \quad (2.3)$$

非線形系($P \neq 1$)において、Brasら²⁾はベキ乗型の確率変数 S^m に関して、次式を提案している。

$$S^m \approx \alpha \bar{S} + \beta \tilde{S} \quad \text{ただし、} m = \frac{1}{p} \quad (2.4)$$

$$\alpha = \bar{S}^{(m-1)} \left\{ 1 + \frac{1}{2} m(m-1) \frac{E\{\tilde{S}^2\}}{\bar{S}^2} + \frac{1}{6} m(m-1)(m-2) \frac{E\{\tilde{S}^3\}}{\bar{S}^3} + \dots \right\} \quad (2.5)$$

$$\beta = \frac{\bar{S}^m}{E\{\tilde{S}^2\}} \left\{ m \frac{E\{\tilde{S}^2\}}{\bar{S}} + \frac{1}{2} m(m-1) \frac{E\{\tilde{S}^3\}}{\bar{S}^2} + \frac{1}{6} m(m-1)(m-2) \frac{E\{\tilde{S}^4\}}{\bar{S}^3} + \dots \right\} \quad (2.6)$$

式(2.1), (2.2)をまとめ式(2.4)を用いて、流出量の1~4次モーメントを求める式(2.7)~(2.10)を得る。

$$\text{平均値} \quad \frac{d\bar{S}}{dt} + \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \bar{S} = \bar{r} \quad \bar{q} = \left(\frac{1}{K}\right)^m \alpha \bar{S} \quad (2.7)$$

$$\text{分散} \quad \frac{d\sigma_s^2}{dt} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \sigma_s^2 = C \sigma_r^2 \quad \sigma_q^2 = \left(\frac{1}{K}\right)^{2m} \beta^2 \sigma_s^2 \quad (2.8)$$

$$\text{3次モーメント} \quad \frac{d\mu_{s3}}{dt} + 3\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \mu_{s3} = C^2 \mu_{r3} \quad \mu_{q3} = \left(\frac{1}{K}\right)^{3m} \beta^3 \mu_{s3} \quad (2.9)$$

$$\text{4次モーメント} \quad \frac{d\mu_{s4}}{dt} + 2\left(\frac{1}{K}\right)^m \beta \mu_{s4} = 6\sigma_r^4 C^2 \quad \mu_{q4} = \left(\frac{1}{K}\right)^{4m} \beta^4 \mu_{s4} \quad (2.10)$$

3. 数値計算との比較

さて、降雨量の実測値は多くの場合、離散化された量である。降雨量の離散化過程は式(3.1)~(3.4)に示すとおりであり、その操作を経た統計量を大文字のRで示す。

$$\text{平均値} \quad \bar{R} = \bar{r} \quad (3.1)$$

$$\text{分散} \quad \sigma_R^2 = \frac{1}{\Delta t} C \sigma_r^2 \quad (3.2)$$

$$\text{3次モーメント} \quad \mu_{R3} = \frac{1}{\Delta t^2} C^2 \mu_{r3} \quad (3.3)$$

$$\text{4次モーメント} \quad \mu_{R4} = \frac{1}{\Delta t^3} C^3 (\mu_{r4} - 3\sigma_r^4) + \frac{1}{\Delta t^2} 3C^2 \sigma_r^4 \quad (3.4)$$

式(3.1)～(3.4)で離散化された降雨統計量を用いて、シミュレーション法から得られる流出量と式(2.7)～(2.10)で得られる理論解を比較した結果が図-3.1, 3.2であり、高周波成分に富む線がシミュレーション解である。計算条件は $K=20$, $P=0.2$, $\Delta t=0.05(\text{hr})$, 標本数5000組である。降雨量の分布型には指数分布を用い、その統計量は以下の通りである。

$$\bar{R}=5, 10(\text{mm/hr}), \sigma_R^2=0.01(\text{mm/hr})^2, \mu_{R3}=2\sigma_R^3(\text{mm/hr})^3, \mu_{R4}=9\sigma_R^4(\text{mm/hr})^4 \quad (3.5)$$

ここでは、紙面の都合上3, 4次モーメントの結果を示した。この場合、流出量の分布型はガンマ分布上を推移して正規分布に漸近することがわかった。また、図-3.3に実線で示すとおり、降雨量の分布型にガンマ分布を用いると、流出量の分布型は単一のピークを有するベータ分布上を推移し、正規分布に漸近することがわかった。また、対数正規分布型の降雨量の場合も、同様の結果が得られた。

4. まとめ

貯留型流出モデルにおいて、1～4次モーメントを理論的に求める手法における確率応答特性について述べた。前節の図-3.3のように、降雨量に与える分布型に対応する流出量の分布型をそれぞれ確認することが出来た。また式(2.4)は、実測値のとりうる範囲においては十分な近似度を示すことがわかった。

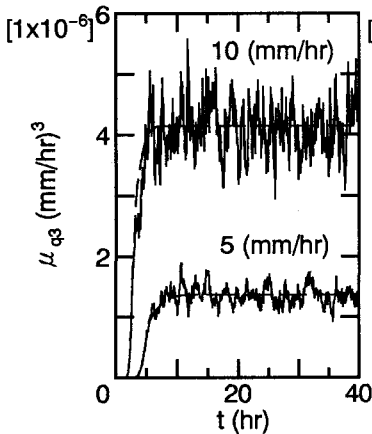


図-3.1 3次モーメント

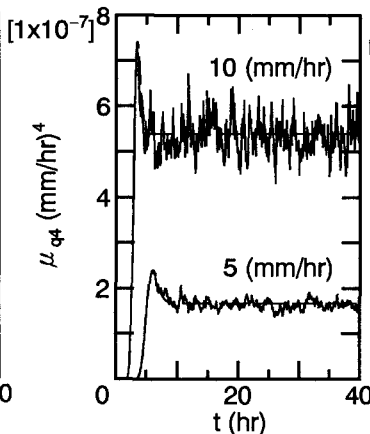


図-3.2 4次モーメント

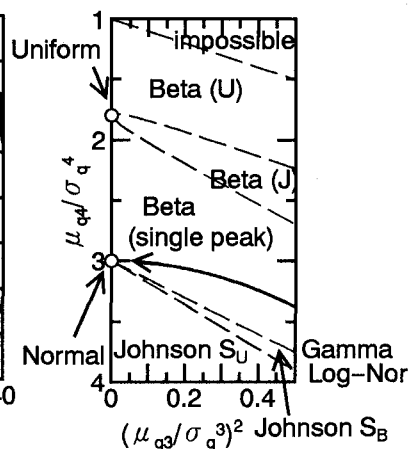


図-3.3 分布型領域図

参考文献

- 1) 藤田睦博, 中尾隆志, 篠原伸和: 貯留型流出モデルの高次モーメントの導出について、水工学論文集、第37巻 pp. 99～104, 1993
- 2) Bras, R. I. and Georgakakos K. P.: Real Time Nonlinear Filtering Techniques in Streamflow Forecasting: A statistical linearization approach, Third International Symposium on Stochastic Hydraulics, pp. 95～105, 1980