

II-19

一般座標系を用いた二次元流況解析

株式会社 松木設計事務所 正員 松木 賢治
北海道開発局開発土木研究所 正員 清水 康行

1. はじめに

河川計画を考えるうえで洪水時の流速と流向、水衝部の位置を適確に予測することは重要な課題である。そのため、従来から二次元流況モデルによる流況計算手法が考えられていた。この方法は、比較的簡単なモデルにより縦横断・平面形状、粗度係数などの境界条件から任意の流量に対して平面的な流速、流向、水位を計算するものである。しかし、従来のモデルは直交座標系を用いたものであるため、計算格子がすべて直交している必要があり、実際の河川のように複雑に湾曲し、河道幅も一様でない河川に対しては計算が困難であった。そこで、ここでは直交座標系による二次元浅水流モデルを、計算格子の配置に制約がなく任意の河道形状に適用できる一般座標系に変換したモデルを開発し、模型実験を用いて検証を行った。

2. 基礎式の一般座標系への変換

(x, y) を直交座標軸、 (ψ, ϕ) を一般座標軸とし、直交座標系の基本式を一般座標系へ変換する。

直交座標系における運動方程式を(1),(2)式、連続の式を(3)式で与える。

$$\frac{\partial(u^x)^2}{\partial x} + \frac{\partial(u^x u^y)}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho h} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial u^x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u^x}{\partial y} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial(u^x u^y)}{\partial x} + \frac{\partial(u^y)^2}{\partial y} = -g \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho h} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\epsilon \frac{\partial u^y}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u^y}{\partial y} \right) \quad (2)$$

$$\frac{\partial(u^x h)}{\partial x} + \frac{\partial(u^y h)}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

ただし、 u^x, u^y は x 軸、 y 軸方向の流速成分、 τ_{bx}, τ_{by} は x 軸、 y 軸方向の河床剪断力、 g は重力加速度、 H は水位、 h は水深、 ρ は流体の密度、 ϵ は渦度粘性係数である。

次に2つの座標系間の座標変換を次式で定義する。

x, y に関する変微分は ψ, ϕ を用いて次式の関係で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \psi_x \frac{\partial}{\partial \psi} + \phi_x \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \psi_y \frac{\partial}{\partial \psi} + \phi_y \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (4)$$

ここで、 $\psi_x = \partial \psi / \partial x$, $\phi_x = \partial \phi / \partial x$, $\psi_y = \partial \psi / \partial y$, $\phi_y = \partial \phi / \partial y$ である。

直交座標系の流速 u^x, u^y と一般座標系の流速の反変成分 u^ψ, u^ϕ の関係は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} u^\psi &= \psi_x u^x + \psi_y u^y \\ u^\phi &= \phi_x u^x + \phi_y u^y \end{aligned} \right\} \quad (5) \quad \left. \begin{aligned} u^x &= \frac{1}{J} (\phi_y u^\psi - \psi_y u^\phi) \\ u^y &= \frac{1}{J} (\psi_x u^\phi - \phi_x u^\psi) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ただし、 J は座標変換のヤコビアンで、 $J = \psi_x \phi_y - \psi_y \phi_x$ である。

上記の関係を用いて(1),(2)式を書き換えたものを(7),(8)式のように示すと、一般座標系における ψ 方向、 ϕ 方向の運動方程式は(9),(10)式のように表される。また、連続の式は(11)式のようになる。

$$X_L = X_R \quad (7) \quad Y_L = Y_R \quad (8)$$

【一般座標系における運動方程式】

$$\langle \psi \text{方向} \rangle \quad \psi_x X_L + \psi_y Y_L = \psi_x X_R + \psi_y Y_R \quad (9)$$

$$\langle \phi \text{方向} \rangle \quad \phi_x X_L + \phi_y Y_L = \phi_x X_R + \phi_y Y_R \quad (10)$$

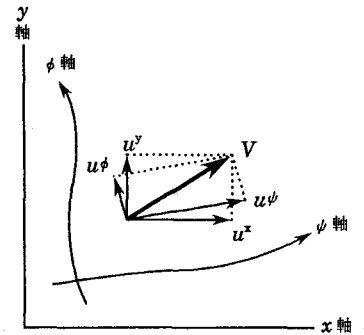


図-1 座標系模式図

$$(\text{連続の式}) \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{u\psi h}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{u\psi h}{J} \right) = 0 \quad \dots\dots (11)$$

ここで、 X_L, X_R はそれぞれ(1)式の左辺、右辺を ψ, ϕ を用いて書き換えたもの、 Y_L, Y_R はそれぞれ(2)式の左辺、右辺を ψ, ϕ を用いて書き換えたものである。

計算は上記の基礎式を差分化し、境界条件として下流端の水位、上流端で流量を与え、初期条件からすべての格子点で流量の連続条件が満足されるまで繰り返し計算を行う。

3. 河道模型における流況計算

上記計算法を実河川に適用し、模型実験による計測値と比較し作成モデルの検証を行う。実験は十勝川中流部1/200縮尺の模型で行われ、流量が16.44 l/sec(現地換算で9,300 m³/sec)のときの流速を図-2に示す6断面で計測している。

開発モデルによる流況計算は同一条件で格子点の配置を換えた2ケースを行い、流速分布を図-3, 4に示した。図-3は格子の配列を低水路と高水敷別にそれぞれ均等に分割した場合(ケース1)で、図-4は低水路、高水敷の境界に関係なく全川幅を均等に分割した場合(ケース2)である。ケース2は各格子点毎に粗度係数を与えている。

図-5, 6は湾曲部断面2, 3の流速の横断分布であり、上から実験値、ケース1、ケース2の流速分布、横断方向の流速、流下方向の流速、河道横断形状を示した。横断方向の流速に関しては、左岸から右岸に向う流れを正とした。ケース1とケース2の計算結果を比較すると流向に関してはほぼ等しいが、流速に関してはケース1の方がケース2より低水路内の流速が大きく、高水敷部の流速が小さくなる傾向にあった。特に低水路と高水敷の境界部分で両ケースの流速値に差があった。これらの計算流況と実験値を比較すると、実験値の高水敷流速の一部に乱れがある箇所を除くとケース1、ケース2ともに流れの傾向はほぼ再現されており、境界部分も含めた全体的な流況形状はケース2の方が良く捉えている。

今回の検証により、模型実験による流況についてはほぼ再現できることを確認した。特にケース2のような格子点の配置であっても計算が可能であることによって、従来流況計算が困難であった低水路内に粗度係数の異なる中州がある様な場合であっても容易に計算できることになる。今後、更に複雑な河道についても検証し、実河川への適用性の向上に役立てたい。

