

愛媛大学工学部
愛媛大学工学部
徳山高専

学 生 辻 島 雄 二
正 員 大 賀 水 田 生
正 員 重 松 恒 美

1. まえがき

薄肉断面部材が横荷重を受ける場合の解析は、一般に有限要素法や有限帯板法などを用いて行われている。特に、有限帯板法は有限要素法に比較して小さな計算機容量及び計算時間で薄肉断面部材の解析が行える効率的な方法であるが、この解析法においても複雑な薄肉断面部材の解析を精度良く行うためには多くの帯板要素を用いる必要があり、それに伴って計算容量及び計算時間が増大することとなる。そこで本研究では、これらの解析法と比較して解析理論が簡単で、かつ小さな計算量で解析できる伝達マトリックス法による変断面薄肉断面部材の曲げ解析プログラムを開発するとともに、数値計算を行い、本解析法の解の精度及び収束状態などの基本的な特性について検討した。

2. 伝達マトリックス法による曲げ解析理論

格間伝達マトリックスの誘導

板要素の断面力-歪関係式、歪-変位関係式及び断面力の釣合式より相対する辺が単純支持されていることを考慮して、変位のx方向成分を三角関数 $w = \bar{w} \sin(m\pi x/a)$ (m :調和項数)で置き換えることにより、次のような状態量 Z に関する一階の常微分方程式が得られる。

$$dZ_m/dy = A_m \cdot Z_m, \quad Z_m = \{w, \psi_y, M_y, V_y, v, u, N_y, N_x, \theta, 1\}_m \quad \dots\dots\dots (1)$$

式(1)を数値積分することにより、板パネルに対する格間伝達マトリックス F_m が求まる。

$$Z_m = \exp(A_m y) \cdot Z_{0m} = F_m \cdot Z_{0m} \quad \dots\dots\dots (2)$$

荷重の取扱方法

図-1(a)に示すように節点2に荷重が作用する場合、節点2での左側状態量 Z_{2m}^L は、右側状態量 Z_{2m}^R に荷重による断面力成分を加えることにより、次のように表される。

$$Z_{2m}^R = Z_{2m}^L + \{0, 0, M, V, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}_2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

なお、等分布荷重及び集中荷重はそれぞれ次のように与えられる。

i) 等分布荷重

本解析プログラムでは、荷重は節点にのみに作用するものとしており、分布荷重の場合の等価節点荷重は次のように表される。

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{q(b_i + b_{i-1})}{m\pi} \left(\cos \frac{m\pi}{a} x_1 - \cos \frac{m\pi}{a} x_0 \right) \\ \bar{M}_n &= \frac{qb^2}{6m\pi} \left(\cos \frac{m\pi}{a} x_1 - \cos \frac{m\pi}{a} x_0 \right) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 q :分布荷重の値、 a :板構造の長さ、 b :板幅

x_0, x_1 :荷重が作用する奥行き方向の始点、終点座標

b :節点間のy軸方向長さ、 b_i, b_{i-1} :節線の左右の板幅

ii) 集中荷重

$$V_n = \frac{2P}{a} \sin \frac{m\pi}{a} x_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 P :荷重の値、 x_0 :荷重の作用するx座標

計算手順

求めた格間伝達及び座標変換マトリックスを用い、上で示した荷重の取扱方法を導入することにより、板構造の両端での状態量を関係づける伝達式が次のように得られる。(図-1(b)参照)

$$Z_4 = F_{43} \cdot R_{32} \cdot F_{32} \cdot R_{21} \cdot F_{21} \cdot Z_0 = U_m \cdot Z_0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、両端での境界条件を考慮し、荷重項を右辺に移行することにより次式が得られる。

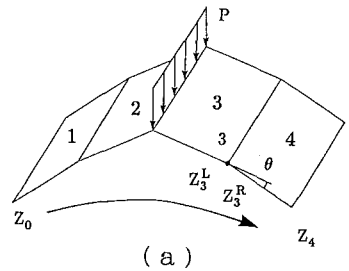
$$U_m' \cdot Z_0 = U_r \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 U_m' :係数マトリックス、 U_r :荷重項

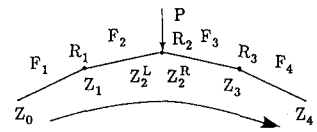
この初期未知状態量に関する連立一次方程式(7)を解き、再び初期状態量を伝達させることにより、各節点での状態量を求める。調和数ごとに上記の操作を繰り返し行い、求めた各調和項数に対する状態量を加算する。

3. 解の収束状態及び計算時間の比較・検討

図-2に示すような変断面板を伝達マトリックスを用いて解析する場合、変断面板に対して得られる非線形の常微分方程



(a)



(b)

図-1 折板断面

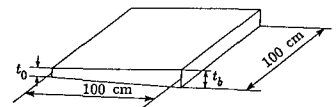
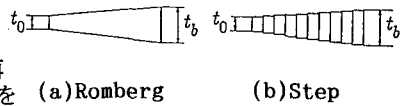


図-2 変断面板



(a) Romberg

(b) Step

図-3 変断面板

式(1)を数値積分（Romberg法）し得られる、変断面板に対する格間伝達マトリックスを用いる方法（図-3(a)）及び断面を階段状に分割近似し、等断面に対する格間伝達マトリックスを用いる方法（ステップ分割法 図-3(b)）が考えられる。そこで、Romberg法及びステップ分割法を用いて、図-2に示す変断面正方形板（ $b=100\text{cm}$, $b/t_a=100$ ）の曲げ解析を行い、両解析法における解の収束状態及び計算時間を比較した。その際、左右の支持条件は単純-単純（S-S）、固定-固定（C-C）の2種類とし、板厚比は $t_b/t_a=1.5$ 及び 2.0 の2種類とした。なお、Romberg法では積分区間の分割数 $m=2^I$ の分割パラメータを $I=1\sim 10$ 、ステップ分割法では分割数 $N=1\sim 40$ と変化させ、数値計算を行った。図-4,5に両解析法での解の収束状態の比較を示しており、縦軸にはRomberg法の $I=10$ の結果を基準とした場合の誤差を、横軸には両解析法での分割パラメータ及び分割数をとっている。

Romberg法による解はいずれの場合も一定値に収束しているが（S-S: $I=7$, C-C: $I=8$ ）、ステップ分割法では $N=40$ においても十分に収束しておらず、S-Sにおいては $t_b/t_a=1.5, 2.0$ でそれぞれ $0.37\%, 0.64\%$, C-Cでは $0.38\%, 0.64\%$ の誤差を生じている。

図-6にRomberg法による解が一定値に収束した分割数での計算時間に対する、ステップ分割法での計算時間を示している。いずれの境界条件においても、分割数 N が小さい範囲では両解析法での計算時間は同程度であるが、 N の増大とともにステップ分割法ではより大きな計算時間が必要となり、 $N=40$ の場合Romberg法と比較してS-Sで約8.6倍、C-Cで約4.4倍の計算時間となっている。

なお、このRomberg法によって得られた解はFEM（ 4×4 アイソパラメトリック要素）と比較して、S-Sの場合 $t_b/t_a=1.5, 2.0$ でそれぞれ $0.8\%, 0.9\%$ 以内の誤差で、C-Cの場合 $t_b/t_a=1.5, 2.0$ で $1.4\%, 1.9\%$ 以内の誤差で一致している。

4. 数値計算例

本解析法を等分布面外荷重（ $q=1\text{kgf/cm}^2$ ）及び集中荷重（ 100kgf ）を受ける部材長 2m の変断面トラフ部材（図-7）に適用した。図-8に集中荷重に対する変形状と、デッキ中央線上におけるたわみ曲線を示している。本解析法による解の結果は、FEM（ 16×8 アイソパラメトリック要素）による結果と最大 1.9% 以内の誤差で一致している。また、等分布荷重においても同様な結果が得られている。

5. 結論

本研究により得られた主な結果は次の通りである。

- 1) 本解析法（Romberg法）を変断面板に適用した場合、変断面を階段状に近似し、等断面に対する格間伝達マトリックスを用いる解析法と比較してより短い計算時間で解が得られる。
- 2) 本解析法を用いて、変断面を有する薄肉断面部材の曲げ解析を精度よく、効率的に行えることが明らかになった。

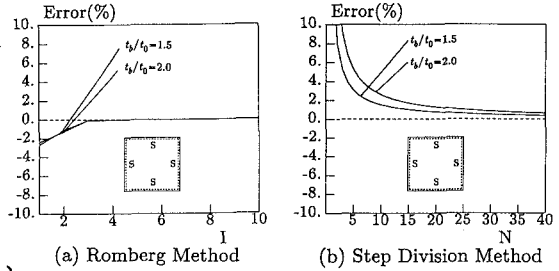


図-4 収束状態（S-S）

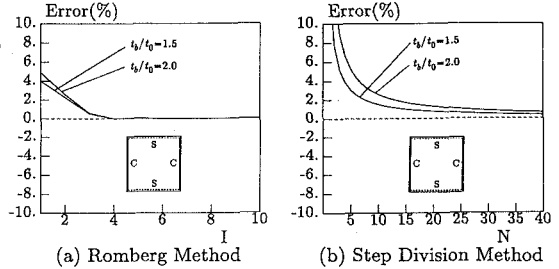


図-5 収束状態（C-C）

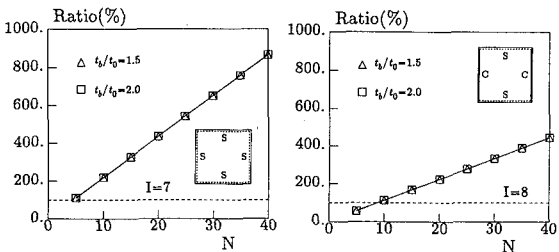


図-6 計算時間

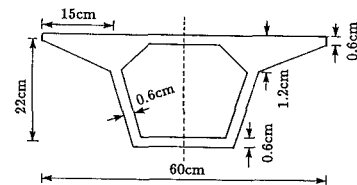


図-7 解析モデルの断面図

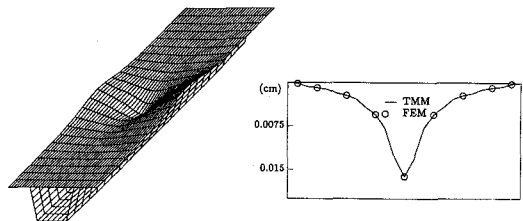


図-8 変形状及びたわみ曲線