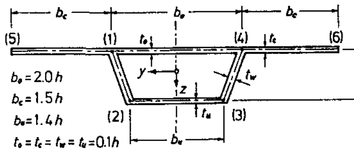
I－688

はりの理論による弾性箱桁のせん断遅れの収束性

東京理科大学　学生員○澤田　利明
正　員　臼木　恒雄

１．まえがき

はりの理論で最初に箱桁のせん断遅れを解いたのはReissner[1]である．張り出しフランジをもたない２軸対称の断面のため，フランジの垂直応力分布を２次放物線で仮定している．断面形状がこれより複雑になると逐次近似の方法[2),3)]により垂直応力分布を仮定せざるをえない．理論的にはこの逐次近似により，いくらでも高次の分布を仮定できる．そこでどこまで逐次近似させるかが問題となる．しかし，解の収束を確認できる範囲において，演算時間は短いにこしたことはない．ただし，応力の最大となる位置でその収束がある程度確認されても，断面全体の応力分布が収束したとは言い切れない．ある断面の応力の最大値からフランジ方向に徐々に低減するに伴いずれてゆく場合がありうる．垂直応力を２次放物線で仮定して良好な分布形が得られるのは比較的フランジ幅の広くない場合である．近年，ドイツ工業規格（DIN18809）はこの分布を２次から４次に変更して精度の改善を計った．かなり高次の項まで計算し，その収束性を検討した研究は，著者の知るかぎりでは無い．以上の事柄を考慮し，比較的高次の多項式をめざして修正伝達マトリックス法[4)]により解析を行った．



図－１　断面形

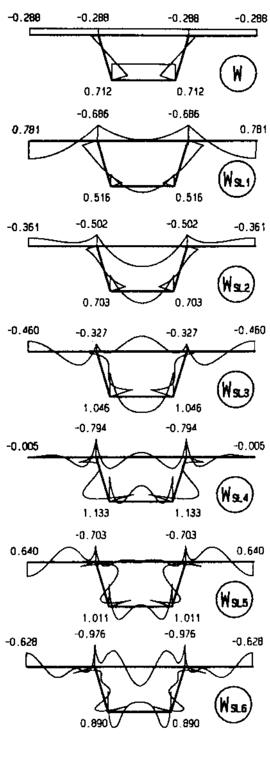
２．解析の特徴

これは弾性理論であるから，鋼，コンクリート構造どちらも解析対象である．しかし，数値計算例は断面変形を起こす隔壁間隔の大きいコンクリート箱桁を扱った．そのため，筆者の既発表の断面変形に関する研究[5)]をせん断遅れに拡張した．桁を構成する板の中央面のせん断ひずみは

$$\gamma_{xs}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial s}$$

とあらわせる．ただし，x およびs はそれぞれ桁の軸方向および断面輪郭線方向の座標である．上式の右辺第１項は面内変位 f によるせん断ひずみの寄与を，第２項は面外変位（反り変位）u による寄与を意味する．板ごとの反り変位を１次式に仮定すると，Timoshenkoはり型のせん断変形を考慮したことになる．これは筆者の研究[5)]ですでに考慮されている．ここではこれを「第０段階のせん断遅れ」とよぶ．この反りを２回積分してせん断遅れによる板ごとの反りを３次までの多項式で仮定すると「第１段階」，５次までの多項式に仮定すると「第２段階」，以下同様に「第 n 段階」まで逐次近似すれば$(2n+1)$次までの多項式を仮定したことになる．

本研究では理論的に以下の工夫により，高次の逐次近似が可能となった．



図－２　単位反り関数

（１）段階ごとの反りの連成を解除する．
（２）各段階内での変形パターンの連成を（可能な限り）解除する．
（３）断面内諸量計算における桁落ち誤差を小さく抑える．
（４）軸方向伝達計算における桁落ち誤差を小さく抑える．

３．支配方程式

状態量ベクトル $\boldsymbol{z}(x)$ および荷重項ベクトル $\boldsymbol{b}(x)$ を用いると，連立１階常微分方程式は

$$\frac{d\boldsymbol{z}(x)}{dx}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}(x)+\boldsymbol{b}(x)$$

とあらわせる．ただし，

$$\boldsymbol{z}^{T}(x)=(\boldsymbol{V}\mid\boldsymbol{\theta}_{1}\boldsymbol{\theta}_{SL1}\cdots\boldsymbol{\theta}_{SLn}\mid\boldsymbol{M}\ \boldsymbol{M}_{SL1}\cdots\boldsymbol{M}_{SLn}\mid\boldsymbol{Q})$$

と定義した．添え字 SLi $(i=1,\cdots,n)$ はせん断遅れの第 i 段階の状態量を意味する．この係数マトリックス $\boldsymbol{A}$ と荷重項ベクトル$\boldsymbol{b}(x)$から伝達マトリックスを作成し，桁の軸方向の解析を行う．

４．数値計算例

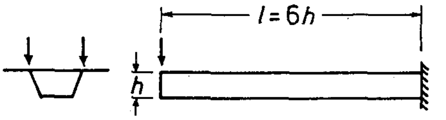
せん断遅れの収束性のみを検討するため，等質等方性の板よりなる台形断面（図－１）箱桁[6]をとりあげる．曲げの単位反り関数は図－２のごとくなる．張り出しはりの先端に対称の集中荷重 P の作用する場合（図－３）を解き，埋め込み端断面の垂直応力の最大となる節点(2) の収束状況を図－４に示す．これから，第６段階までにほとんど収束したといえる．第６段階まで逐次近似させたときの埋め込み端断面の垂直応力分布と弾性論（$\nabla^4\phi=0$, $\nabla^4 w=q$）による厳密解との比較を図－５に与える．また，断面内の節点(2) および下フランジ中点での垂直応力の軸方向分布を図－６に与える．

５．まとめ

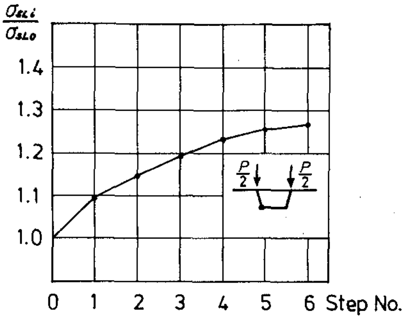
はりの理論では応力－ひずみ関係において，Poisson 比を無視しており，弾性論の解は集中荷重の Fourier級数展開に問題があるが，比較的良好な一致と言える．第６段階までの逐次近似は１３次多項式による近似となっている．このフランジの応力分布を２次式で表すのはやや強引なことがわかる．

６．参考文献

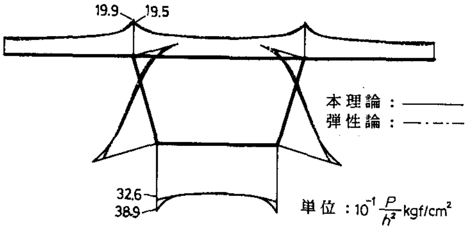
1) Reissner,E.: Quart. of Appl. Math.,Vol.4,No.3,1946
2) 稼農・薄木・堀江：土木学会論文報告集，No.282，1979
3) Koo,K.K. and Y.K. Chung: J.of Eng. Mech., 1989
4) 臼木・中村：土木学会論文集，No.374/I-6，1986
5) 臼木：土木学会論文集，No.368/I-5，1986
6) Dezi,L. and L.Mentrasti: J. of Str. Eng., 1985



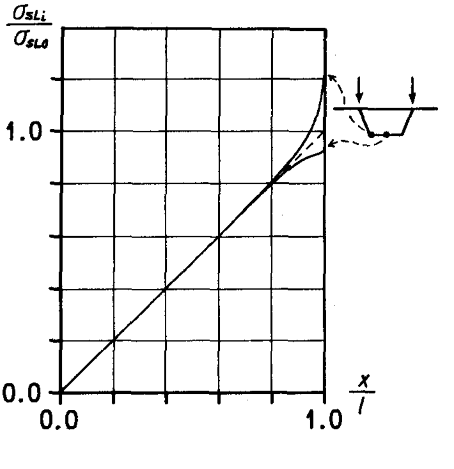
図－３　構造系



図－４　収束状況



図－５　垂直応力分布



図－６垂直応力の軸方向変化