

ト ビ ー 工 業 正 員 長 屋 五 郎
長岡技術科学大学 正 員 林 正

1. まえがき

平面応力問題には有限要素法による種々の要素が開発されているが、本文では節点帯板法による解法を示す。平面要素の変位関数には、板の曲げ問題で精度の良い値が得られた10節点のMindlin要素¹⁾の式を用いて、任意形状のサブパラメトリック平面要素を定式化する。

2. 節点帯板要素

平面応力要素は、図-1に示すMindlin要素と同じ10個の節点と5本の節線を有する。一般化変位には、全体デカルト座標系の x, y 軸方向の節点 n の変位成分 u_n, v_n と、節線 i 上で u, v を級数展開したときの係数 u_{im}, v_{im} を用いる。ここに、 m は級数項である。これらの自由度を次のベクトルで表わす。

$$d_0 = \{ u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{10}, v_{10} \}^T \dots\dots\dots(1)$$

$$d_m = \{ u_{1m}, v_{1m}, u_{2m}, v_{2m}, \dots, u_{5m}, v_{5m} \}^T \dots\dots\dots(2)$$

節点帯板法の手法により、要素中央面上の任意点 (ξ, η) の変位は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u(\xi, \eta) &= f_{01}^T d_0 + f_{11}^T \sum_{m=1} X_m d_m \\ v(\xi, \eta) &= f_{02}^T d_0 + f_{12}^T \sum_{m=1} X_m d_m \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

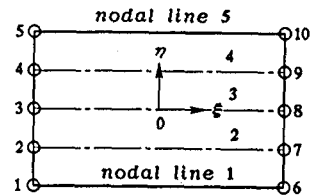


図-1 節点帯板要素

ここに、 f_{0i}, f_{1i} ($i = 1, 2$) はそれぞれ節点、節線自由度に関する形状関数ベクトルで、各成分の形状関数はLagrangeの多項式である。また、 X_m は級数展開に用いる多項式である。これらの関数は、文献1)と同じであるので省略する。

3. サブパラメトリック要素

平面要素のひずみ成分をベクトル ϵ で表わす。

$$\epsilon = \{ \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy} \}^T \equiv \{ e_1, e_2, e_3 \}^T \dots\dots\dots(4)$$

これに式(3)を用いると次のように表わすことができる。

$$e_i = b_{0i}^T d_0 + \sum_{m=1} b_{mi}^T d_m \quad (i = 1, 2, 3) \dots\dots\dots(5)$$

ここに、

$$b_{01} = I_{11} f'_{01} + I_{12} g_{01}, \quad b_{02} = I_{21} f'_{02} + I_{22} g_{02}, \quad b_{03} = I_{21} f'_{01} + I_{22} g_{01} + I_{11} f'_{02} + I_{12} g_{02} \dots\dots(6)$$

$$\left. \begin{aligned} b_{m1} &= I_{11} X'_m f_{11} + I_{12} X_m g_{11}, \quad b_{m2} = I_{21} X'_m f_{12} + I_{22} X_m g_{12} \\ b_{m3} &= X'_m (I_{21} f_{11} + I_{11} f_{12}) + X_m (I_{22} g_{11} + I_{12} g_{12}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

$$g_{0i} = \partial f_{0i} / \partial \eta, \quad g_{1i} = \partial f_{1i} / \partial \eta \dots\dots\dots(8)$$

I_{ij} は2次元のJacobi行列の逆行列の (i, j) 要素である。また、 $(\prime)$ は ξ に関する微分を表わす。

要素の剛性方程式は、 d_0, d_m に対する一般化力を q_0, q_m 、荷重ベクトルを p_0, p_m とすると、次式で与えられる。

$$[k_{00}] d_0 + \sum_{n=1} [k_{0n}] d_n = q_0 + p_0, \quad [k_{m0}] d_0 + \sum_{n=1} [k_{mn}] d_n = q_m + p_m \quad (m = 1, 2, \dots) \dots\dots\dots(9)$$

剛性行列は式(5)を用いて次のようになる。

$$[k_{k\ell}] = \iint D_p \{ b_{k1} b_{\ell 1}^T + b_{k2} b_{\ell 2}^T + \nu (b_{k1} b_{\ell 2}^T + b_{k2} b_{\ell 1}^T) + \lambda b_{k3} b_{\ell 3}^T \} |J| d\xi d\eta \quad (k, \ell = 0, m, n) \dots\dots(10)$$

$$D_p = Et / (1 - \nu^2), \quad \lambda = (1 - \nu) / 2 \dots\dots\dots(11)$$

ここに、 $|J|$ はJacobian、 E はヤング係数、 ν はポアソン比、 t は板厚である。

4. 数値計算例

(1) 片持板

上縁に等分布荷重 ($q = 1.0$) が作用する図-2 の片持板を計算する。板の寸法と材料定数には次の値を用いる。

$$b = 1.0, t = 1.0, E = 100.0, \nu = 0.0$$

板の形状比 a/b が 4 の場合について、1 要素で計算した結果を 8 節点 Serendipity 要素 (4×20) を用いた FEM 解と比較する。なお、固定端側ではすべての自由度を拘束した。

片持板の上縁 ($y = 1.0$) の y 軸方向の変位 v を○印の FEM による値と比較して図-3 に示す。図中の実線は 3 項用いて計算した値で、FEM 解と良く一致している。

次に、図-2 の断面 A-A ($y = 0.947$, FEM 要素の 2×2 Gauss 積分点) 上の σ_x , σ_y と断面 B-B ($y = 0.447$) 上の τ_{xy} を図-4 に示す。 σ_x は 3 項で、 σ_y と τ_{xy} は破線の 5 項で FEM 解に一致している。

(2) 円孔を有する無限板

円孔をもつ無限板が、無限遠において x 軸方向に一樣な引張応力を受けて応力集中が生じる問題を計算する。数値計算では無限領域を扱うことができないので、中央に円孔がある長方形板を解析するが、円孔の半径 r は板の寸法に比べて無限小と見なせる程度に小さくし、板の端部において一樣な応力状態になるような形状比を用いる。この条件から、板の半幅 a に対して $r/a = 1/100$ 、形状比を $b/a = 3$ とする。

円孔が $r/a = 0.05 \sim 0.5$ の有限幅の半無限板についての計算では、 $r/a = 0.05$ のとき $b/a = 3$ 、 $r/a \geq 0.1$ のとき $b/a = 2$ とする。

計算では、図-5 に示すように板の $1/4$ を 2 要素に分割した場合と、さらに円孔から放射状に 4 要素に分割した場合を用いる。級数はすべての計算例で 3 項とし、材料定数などには図中の値を用いる。

計算結果から求めた応力集中係数 α と、その厳密解に対する誤差 (%) を表-1 に示す。ここに、負の誤差は厳密解よりも小さいことを意味する。2 要素でかなり良い値が得られることが分る。ここで、 α は点 A の σ_x を最小断面での平均値 σ_0 で除した値であるので、通常の FEM では精度の悪い要素の隅角点の応力を用いていることに注目すべきである。

表-1 応力集中係数 (誤差%)

r/a	0.0	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
2 elements	—	2.931 (-1.3)	2.918 (2.0)	2.725 (-0.2)	2.646 (5.4)	2.497 (6.2)	2.345 (4.7)	2.231 (3.3)
4 elements	—	2.904 (-2.2)	2.893 (1.1)	2.702 (-1.0)	2.621 (4.4)	2.479 (5.5)	2.339 (4.4)	2.236 (3.5)
Exact	3.0	2.97*	2.86*	2.73	2.51	2.35	2.24	2.16

*印は半無限板の近似値から求めた値

5. あとがき

節点帯板法は、平面応力解析でも粗い要素分割で、要素内の任意点で精度の良い応力が得られることを示した。本要素は曲げ要素¹⁾と同じ形状関数を用いているので、これらを平面シェル要素に拡張して箱桁などの折れ板構造の立体解析に適用する場合には、稜線上で適合条件を満たす解が得られる。

1) 林・坂口：Mindlin 節点帯板要素による厚板と薄板の曲げ解析，土木学会論文集，No.459/I-22，1993。

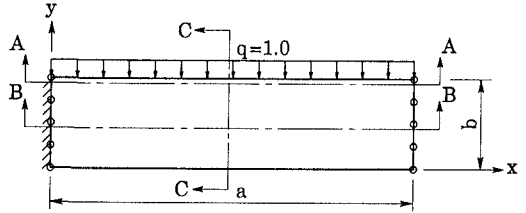


図-2 片持板

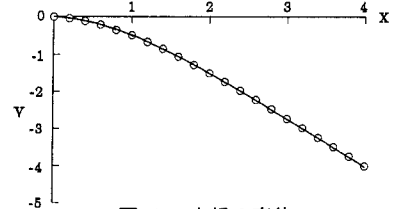
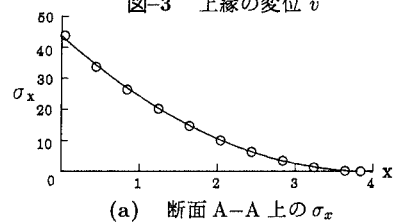
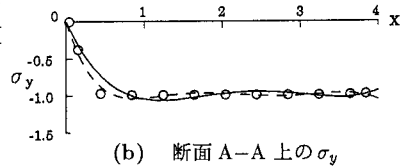


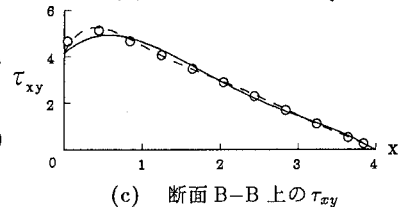
図-3 上縁の変位 v



(a) 断面 A-A 上の σ_x

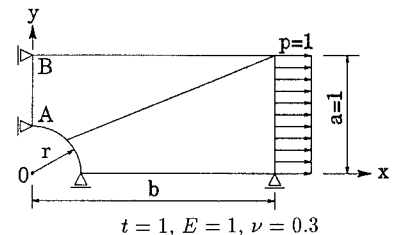


(b) 断面 A-A 上の σ_y



(c) 断面 B-B 上の τ_{xy}

図-4 断面上の応力



$$t = 1, E = 1, \nu = 0.3$$

図-5 円孔を有する平板