土木学会第48回年次学術講演会（平成５年９月）

I－683

ハイアラーキ節点帯板法の開発

長岡技術科学大学　正員　林　　正

1．まえがき

平板の曲げ解析のための Mindlin 節点帯板要素を開発し，薄板にも適用できる次数低減積分法を提案した[1]．この要素は，要素内の任意の点で高精度の応力を求めることができる長所を有するが，長大要素として用いるために一方向(長手方向)に変位を級数展開し，幅方向に多数の節点を設けているので要素に方向性がある．

本研究では，節点帯板法をさらに改良して，有限要素法と同程度の汎用性のあるハイアラーキ節点帯板法を提案する．ここでは平面応力解析と板の曲げ解析の式を示すが，本文で説明するハイアラーキの概念は，3次元応力解析のための節点プリズム法[2]にも用いることができる．

2．ハイアラーキ要素

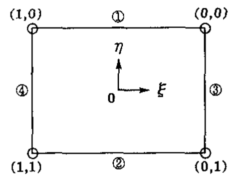
図–1,2 に示すように，ハイアラーキ節点帯板要素では，節点は隅角点のみに設け，節線は要素の全境界線上に設ける．図中の( )は節点番号，○は節線番号を示し，**図–1** の (ξ,η) は $[-1,1]$ で正規化した要素座標系である．三角形要素では，面積座標 (ξ_1,ξ_2,ξ_3) を用いる．節点と節線の変位成分は，全体デカルト座標系の x, y, z 軸方向の並進変位 u, v, w と x, y 軸まわりの回転角 θ_x, θ_y とする．

これらの変位成分に対する一般化変位には，節点自由度と節線上で変位を級数展開したときの展開係数を用いる．さらに，高次要素では要素内で各変位成分を二重級数展開したときの係数を一般化変位に加える．

3．四辺形要素

ある変位成分 d の一般化変位を d_{mn} で表わす．

$$d_{mn}=\begin{cases}\text{節点自由度} & (m,n=0,1)\\ \text{節線自由度} & (m=0,1\ \ or\ \ n=0,1)\\ \text{内部自由度} & (m,n\geq 2)\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (1)$$

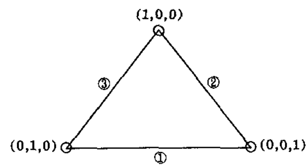


図–1　四辺形要素

ここに節線自由度の添字 m,n は一方が0または1で，他方は2以上とする．

変位関数には各成分とも同じ式を用いて，次式で仮定する．

$$d(\xi,\eta)=\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}f_m(\xi)\cdot f_n(\eta)\cdot d_{mn}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2)$$



図–2　三角形要素

ここに，

$$f_m(\xi)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\xi) & (m=0)\\ \frac{1}{2}(1-\xi) & (m=1)\\ (1-\xi^2)\xi^{m-2} & (m\geq 2)\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (3)$$

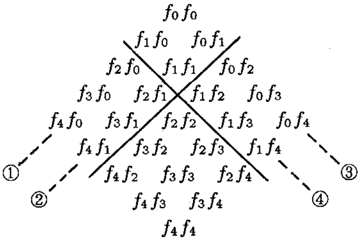
$f_n(\eta)$ は上式において ξ を η に置き換えた関数である．なお，$m\geq 2$ は級数展開に用いる多項式である．

式(2)の多項式 f_m, f_n の次数は f_0 は1次，その他は添字 m,n に等しい．したがって，f_0 を1次とすると，添字の和は形状関数の次数 p に等しいので，Pascal の三角形に類似した形状関数の階層図を**図–3** のように表わすことができる．**図–3** は，式(2)において $M=N=4$ とした場合で，節点，節線と内部自由度を実線で区分している．○印は4本の節線を表わし，各節線では変位を3項 $(m,n=2,3,4)$ まで級数展開したもので，内部自由度 $(m,n\geq 2)$ は9個である．また，節線の交点は**図–1** の隅角点に対応している．

ここで，$M=N=1$ とすると，式(2)の変位関数は FEM の双1次要素になり，同様に2とすると双2次要素になる．また，4とした**図–3** の場合は，3項用いた10節点要素[1]に一致する(形状関数は異なるが，変位場の次数は同じであるので同一の解が得られる)．したがって，この場合には完全4次多項式に対してより高次の項が含まれている．そこで，$f_2 f_2$ に対する一般化変位 d_{22} を残して残りの8個の内部自由度を削除すると，17個の自由度でもって完全4次多項式で表わされた変位場が得られる．一般的に，$M=N$ とした場合には，完全多項式の項数より2個多い自由度でもって完全 M 次多項式の変位場を求めることができる．

表–1　三角形要素の形状関数

p	Node or Line			Internal mode			
	1	2	3				
1	ξ_1	ξ_2	ξ_3				
2	X_1	X_2	X_3				
3	$X_1\xi_{23}$	$X_2\xi_{31}$	$X_3\xi_{12}$	X_0			
4	$X_1\xi_{23}^2$	$X_2\xi_{31}^2$	$X_3\xi_{12}^2$	$X_0\xi_{12}$	$X_0\xi_{23}$	$(X_0\xi_{31})$	
5	$X_1\xi_{23}^3$	$X_2\xi_{31}^3$	$X_3\xi_{12}^3$	$X_0\xi_{12}^2$	$X_0\xi_{23}^2$	$X_0\xi_{31}^2$	
6	$X_1\xi_{23}^4$	$X_2\xi_{31}^4$	$X_3\xi_{12}^4$	$X_0\xi_{12}^3$	$X_0\xi_{23}^3$	$X_0\xi_{31}^3$	$X_0\xi_{12}\xi_{23}\xi_{31}$



図–3　形状関数の階層図

ハイアラーキ節点帯板要素では，内部自由度に対する形状関数は要素境界上でゼロであるので，周辺自由度の形状関数を修正することなく内部自由度の加除を自由に行うことができる特徴がある．また，要素の形状比に応じて，M, N に異なる数を用いて２方向の級数項数を変えることができる．

4．三角形要素

三角形要素では一般化変位を $d_{\ell mn}$ で表わし，３つの添字は節点自由度では２つがゼロ，節線自由度では１つがゼロ，内部自由度はすべての添字は１以上とする．これより，各変位成分 d の変位関数を次式で仮定する．

$$d(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \sum_{\ell=0}\sum_{m=0}\sum_{n=0} N_{\ell mn} \cdot d_{\ell mn} \quad \cdots\cdots (4)$$

ここに，ℓ, m, n のすべてが０の場合を除くものとする．また，形状関数 $N_{\ell mn}$ は３つの関数の積で与える．

$$N_{\ell mn}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = af_\ell(\xi_1) \cdot f_m(\xi_2) \cdot f_n(\xi_3) \quad \cdots\cdots (5)$$

$$f_k(\xi_i) = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ 2\xi_i(2\xi_i-1)^{k-1} & (k \geq 1) \end{cases} \quad \cdots\cdots (6)$$

式 (6) の第２式は四辺形要素との適合性を満たすように選んだ関数で，式 (5) の右辺の係数 a は節点自由度のみ 1/2，その他の自由度では１とする．面積座標は要素周辺上で $\xi_i + \xi_j = 1$ の関係が成り立つので，i, j は 1,2,3 を循環的にとるものとすれば，第２式の ( ) の項を次のように表わすことができる．

$$2\xi_i - 1 = 1 - 2\xi_j = \xi_i - \xi_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad \cdots\cdots (7)$$

式 (5),(6) より，形状関数の $N_{\ell mn}$ の次数 p は次式のようになる．

$$p = \ell + m + n \quad (p \geq 1) \quad \cdots\cdots (8)$$

したがって，一般化変位を完全多項式の項数に等しい数だけ選ぶと，式 (4) の変位関数で表わされる要素の変位場は FEM の三角形要素と同じように完全 p 次多項式で与えられる．なお，三角形要素でも高次項を用いる場合に低次項の形状関数を変更する必要はなくてハイアラーキ的である．

ここで，式 (5) の３つの関数のすべての組合せは互いに独立でないので，式 (8) の条件を満たす組合せの内から独立な組合せを選ぶと表–1 の形状関数が得られる．なお，４次の内部自由度の関数では，３つの組合せから任意の２つを選ぶものとする．また，表中には以下の記号を用いている．

$$\xi_{ij} = \xi_i - \xi_j\ , \quad X_0 = 8\xi_1\xi_2\xi_3\ , \quad X_1 = 4\xi_2\xi_3\ , \quad X_2 = 4\xi_3\xi_1\ , \quad X_3 = 4\xi_1\xi_2 \quad \cdots\cdots (9)$$

5．剛性方程式

要素の剛性方程式は，仮想仕事の原理により容易に導くことができる[1)]．板の曲げ解析には Mindlin 理論を用いるので，平面応力解析を含めてすべての変位成分の変位関数が同じであることを考慮すると，剛性行列の計算は数分の一で済む．また，形状関数は規則性のある単純な式であるので積分演算は容易である．なお，任意形状の要素は写像の手法により求めることができる．

プログラムは FEM と殆ど同じで，中間節点がある場合よりもやや簡単になる．さらに，入力データが少なくて済むことなどの長所がある．

1) 林・坂口：Mindlin 節点帯板要素による厚板と薄板の曲げ解析，土木学会論文集，No.459/I–22，1993.
2) 林・小林：節点プリズム法による３次元応力解析，土木学会論文集，No.450/I–20，1992.